ORDINAMENTO 2010 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

In un sistema di riferimento cartesiano Oxy, si denoti con Γ_a il grafico della funzione

$$f_a(x) = (x-a)e^{2-\frac{x}{a}}$$

dove a è un parametro reale positivo ed e è il numero di Nepero.

1)

Si dimostri che, al variare di a, le curve Γ_a tagliano l'asse delle x secondo lo stesso angolo α. Si determini l'ampiezza di α in gradi e primi sessagesimali.

Il punto di intersezione con l'asse x ha ascissa: $x = a$.

Calcoliamo la derivata prima della funzione:

$$f_a'(x) = e^{2-\frac{x}{a}} + (x-a)\cdot\left[e^{2-\frac{x}{a}}\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)\right] = e^{2-\frac{x}{a}} - \frac{1}{a}x\cdot e^{2-\frac{x}{a}} + e^{2-\frac{x}{a}} = 2e^{2-\frac{x}{a}} - \frac{1}{a}x\cdot e^{2-\frac{x}{a}}$$

Detto α l'angolo formato tra la tangente alla curva nel punto di ascissa $x = a$ e l'asse delle x, risulta:

$tg\alpha = f_a'(a) = 2e - e = e = costante\ al\ variare\ di\ a$.

Essendo $tg\alpha = e$ risulta $\alpha = arctg(e) \cong 69.802° \cong 69°48'$

2)

Si dimostri che la tangente a Γ_a nel punto di flesso, descrive, al variare di a, un fascio di rette parallele. Si determini l'equazione di tale fascio.

Calcoliamo la derivata seconda della funzione:

$$f_a'(x) = 2e^{2-\frac{x}{a}} - \frac{1}{a}x\cdot e^{2-\frac{x}{a}} = \left(2-\frac{x}{a}\right)e^{2-\frac{x}{a}}$$

$$f_a''(x) = -\frac{1}{a}\cdot e^{2-\frac{x}{a}} + \left(2-\frac{x}{a}\right)\cdot\left[e^{2-\frac{x}{a}}\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)\right] = -\frac{3}{a}\cdot e^{2-\frac{x}{a}} + \frac{x}{a^2}\cdot e^{2-\frac{x}{a}} = \frac{1}{a}\cdot e^{2-\frac{x}{a}}\left(\frac{x}{a}-3\right) \geq 0$$

se $\frac{x}{a} - 3 \geq 0$ (ricordiamo che $a > 0$), quindi: $x \geq 3a$; abbiamo quindi la concavità verso il basso se $x < 3a$ e verso l'alto se $x > 3a$: pertanto $x = 3a$ è punto di flesso.
Il flesso ha dunque coordinate:

$$F = (3a; 2a \cdot e^{-1}) = \left(3a; \frac{2a}{e}\right)$$

Cerchiamo la tangente nel punto di flesso.

$f_a'(3a) = -\frac{1}{e} = m = costante$; la tangente in F descrive quindi un fascio di rette parallele.

Equazione del fascio:

$$y - \frac{2a}{e} = -\frac{1}{e}(x - 3a) \quad \Longrightarrow \quad ey - 2a + x - 3a = 0 \quad \Longrightarrow \quad x + ey - 5a = 0$$

3)

Posto $a = 1$, si studi $f_1(x)$ e si tracci Γ_1 .

Per $a = 1$ abbiamo:

$y = f_1(x) = (x - 1)e^{2-x}$

Studiamo la funzione di equazione:

$y = f(x) = (x - 1)e^{2-x}$

Dominio: $-\infty \leq x \leq +\infty$

Simmetrie notevoli:

$f(-x) = (-x - 1)e^{2+x} \neq f(x)$: la funzione non è pari
$f(-x) \neq -f(x)$: la funzione non è dispari

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se $x = 0$, $y = -e^2$
Se $y = 0$, $x = 1$.

Segno della funzione:

$y > 0 \quad se \quad x - 1 > 0 \, , \quad x > 1$

Limiti:

$\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{2-x} = \lim_{x\to-\infty}(x)e^{-x} = -\infty$ (non può esserci asintoto obliquo, poiché la funzione non è un infinito di ordine 1).

$\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^{2-x} = \lim_{x\to+\infty}(x)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0^+$ (asintoto $y = 0$ per $x \to +\infty$)

Derivata prima:

$f'(x) = \left(2 - \frac{x}{a}\right)e^{2-\frac{x}{a}} = (2-x)e^{2-x} \geq 0$ se $2 - x \geq 0$, $x \leq 2$.
La funzione è crescente se $x < 2$, decrescente se $x > 2$

$x = 2$ è punto di massimo relativo (e assoluto), ed è $f(2) = 1$

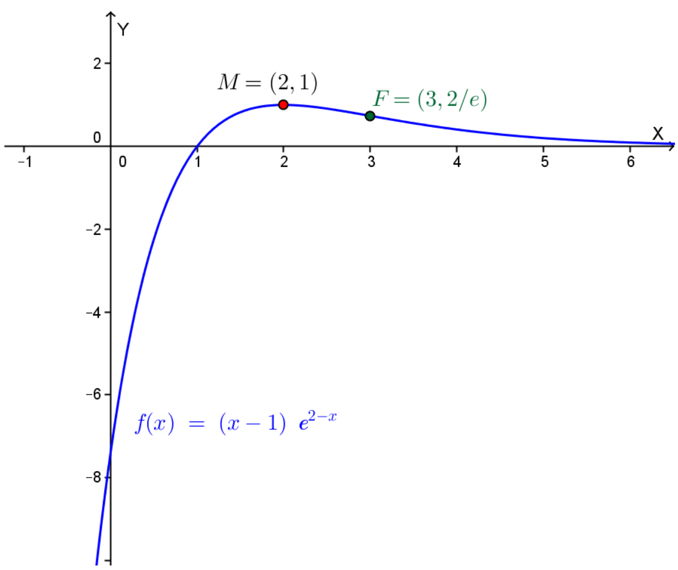
Derivata seconda:

$f''(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{2-\frac{x}{a}}\left(\frac{x}{a} - 3\right) = e^{2-x} \cdot (x-3) \geq 0$ se $x - 3 \geq 0$, $x \geq 3$

Quindi il grafico volge la concavità verso l'alto se > 3 e verso il basso se $x < 3$.

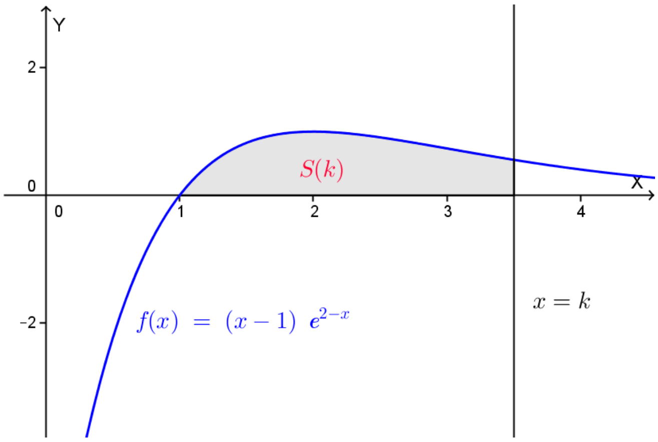
$x = 3$ è un punto di flesso (ordinata $f(3) = \frac{2}{e}$).

Il grafico della funzione è il seguente:



4)

Si calcoli l'area $S(k)$ della regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ_1 , dall'asse x e dalla retta $x = k$, con $k > 1$. Cosa si può dire di $S(k)$ quando $k \to +\infty$?



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$S(k) = \int_1^k (x-1)e^{2-x}\,dx$$

Cerchiamo, integrando per parti, una primitiva di $f(x) = (x-1)e^{2-x}$.

$$\int (x-1)e^{2-x}\,dx = \int (x-1)(-e^{2-x})'\,dx = -e^{2-x}(x-1) - \int 1 \cdot (-e^{2-x})dx =$$

$$= -e^{2-x}(x-1) - e^{2-x} + C = -x \cdot e^{2-x} + C$$

Quindi:

$$S(k) = \int_1^k (x-1)e^{2-x}\,dx = [-x \cdot e^{2-x}]_1^k = -k \cdot e^{2-k} - (-e) = e - k \cdot e^{2-k}$$

Risulta infine:

$$\lim_{k\to+\infty} S(k) = \lim_{k\to+\infty} (e - k \cdot e^{2-k}) = e$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri