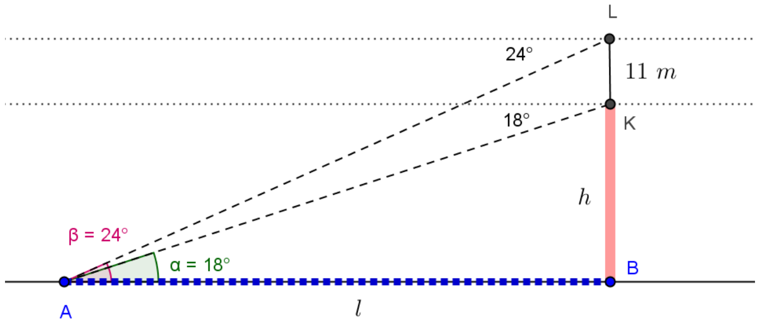
# PNI 2010 - SESSIONE SUPPLETIVA

## QUESITO 1

*In cima ad una roccia a picco sulla riva di un fiume è stata costruita una torretta d'osservazione alta 11 metri. Le ampiezze degli angoli di depressione per un punto situato sulla riva opposta del fiume, misurate rispettivamente dalla base e dalla sommità della torretta, sono pari a 18° e 24°. Si determini la larghezza del fiume in quel punto.*




Indichiamo con h l'altezza della roccia e con $l$ la larghezza del fiume. Risulta:

$h = l \cdot tg18°$ , $h + 11 = l \cdot tg24°$ , da cui:

$$\frac{h}{tg18°} = \frac{h+11}{tg24°} \Longrightarrow h(tg24° - tg18°) = 11\, tg18° \Longrightarrow h = \frac{11\, tg18°}{tg24° - tg18°} \cong 29.71\, m$$

Quindi:

$$l = \frac{h}{tg18°} \cong \frac{29.71\, m}{tg18°} \cong 91.44\, m$$

Il fiume, nel punto richiesto, è quindi largo circa 91.44 metri.

## QUESITO 2

*Considerata la funzione:* $f(x) = \frac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x}$, *dove a è una costante reale positiva, si determini tale costante, sapendo che* $lim_{x \to 0} f(x) = 2$ .

Risulta:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{3xln3} - e^{xlna}}{e^{xln6} - e^{xln5}} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^{3xln3} - 1) - (e^{xlna} - 1)}{(e^{xln6} - 1) - (e^{xln5} - 1)} =$$

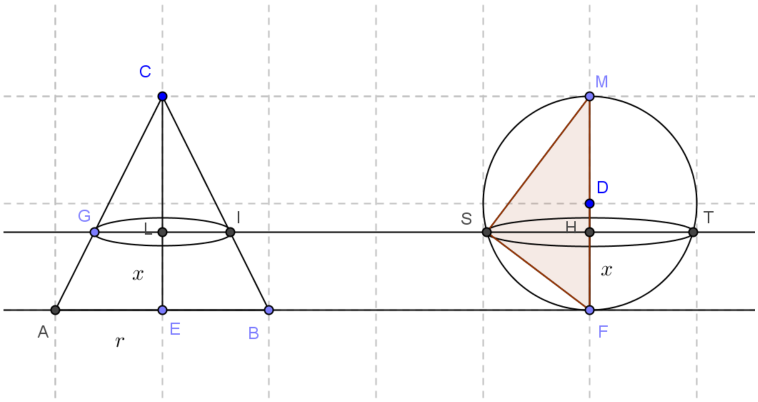
$$= \lim_{x \to 0} \frac{3x ln3 - x lna}{x ln6 - x ln5} = \frac{3ln3 - lna}{ln6 - ln5} = \frac{ln\left(\frac{27}{a}\right)}{ln\left(\frac{6}{5}\right)} = 2 \quad se \quad ln\left(\frac{27}{a}\right) = 2 \cdot ln\left(\frac{6}{5}\right) \quad da\ cui:$$

$$ln\left(\frac{27}{a}\right) = ln\left(\frac{36}{25}\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{27}{a} = \frac{36}{25} \quad \Longrightarrow \quad a = 27 \cdot \frac{25}{36} = \frac{75}{4}$$

(Nota: ricordiamo che , se $f(x) \to 0$ , risulta: $e^{f(x)} - 1 \sim f(x)$ ).

## QUESITO 3

*Su un piano orizzontale α si pongono un cono circolare retto, il cui raggio di base è r e l'altezza 2r, e una sfera di raggio r. A quale distanza x dal piano α bisogna segare questi due solidi con un piano orizzontale β, perché la somma delle aree delle sezioni così ottenute sia massima?*




La distanza x dal piano α soddisfa la limitazione: $0 \leq x \leq 2r$

La sezione con il cono ha area: $S(cono) = \pi \cdot GL^2$
Determiniamo GL.
Dalla similitudine fra i triangoli GLC e AEC segue che:

$$GL: CL = AE: CE \quad \Longrightarrow \quad GL: (2r - x) = r: 2r \quad \Longrightarrow \quad GL = \frac{2r - x}{2}$$

Quindi: $S(cono) = \pi \cdot GL^2 = \pi \cdot \left(\frac{2r-x}{2}\right)^2$

La sezione con la sfera ha area: $S(sfera) = \pi \cdot SH^2$
Per il secondo teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo FSM risulta:

$SH^2 = FH \cdot HM = x(2r - x)$

Quindi: $S(sfera) = \pi \cdot SH^2 = \pi \cdot x \cdot (2r - x)$

La somma delle aree delle sezioni è quindi:

$S = S(cono) + S(sfera) = \pi \cdot \left(\frac{2r-x}{2}\right)^2 + \pi \cdot x \cdot (2r - x)$ che è massima se lo è:

$y = \left(\frac{2r-x}{2}\right)^2 + x \cdot (2r - x) = (2r - x)\left(\frac{2r-x}{4} + x\right) = (2r - x)\left(\frac{2r+3x}{4}\right) = \max se\ lo$ è:

$z = (2r - x)(2r + 3x) = -3x^2 - 4rx + 4r^2$; tale funzione ha per grafico una parabola con la concavità rivolta verso il basso, quindi ha il massimo nel vertice, cioè per:

$x = -\frac{b}{2a} = \frac{4r}{6} = \frac{2}{3}r$ , valore che soddisfa la limitazione della x.

In conclusione:

La somma delle aree delle sezioni è massima quando la distanza x dal piano di base α è uguale ai 2/3 del raggio di base del cono.

## QUESITO 4

*Si dimostri che per gli zeri $x_1$ e $x_2$ di una funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ vale la relazione $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$ e si dia una interpretazione geometrica della affermazione dimostrata.*

Risulta: $f'(x) = 2ax + b$, quindi (ricordando che $x_1 + x_2 = -b/a$ )

$$f'(x_1) + f'(x_2) = (2ax_1 + b) + (2ax_2 + b) = 2a(x_1 + x_2) + 2b = 2a \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) + 2b = 0$$

Interpretazione geometrica:

le tangenti nei punti di intersezione di una parabola con l'asse delle x hanno coefficienti angolari opposti.

Infatti $f'(x_1)$ è il coefficiente angolare della tangente nel punto di ascissa $x_1$ ed $f'(x_2)$ è il coefficiente angolare della tangente nel punto di ascissa $x_2$ e la relazione $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$ può essere vista nella forma $f'(x_1) = -f'(x_2)$.

## QUESITO 5

*Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, nell'intervallo $1 \leq x \leq 2$.*

Il valor medio richiesto è dato da:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \frac{\int_1^2 \frac{e^x(x-1)}{x^2}dx}{2-1} = \int_1^2 \frac{e^x(x-1)}{x^2}dx$$

Cerchiamo una primitiva di $\frac{e^x(x-1)}{x^2}$ integrando per parti:

$$\int \frac{e^x(x-1)}{x^2}dx = \int \left(-\frac{1}{x}\right)' \left(e^x(x-1)\right)dx = -\frac{1}{x}e^x(x-1) - \int -\frac{1}{x}[e^x(x-1)+e^x]dx =$$

$$= -e^x + \frac{e^x}{x} + \int \frac{1}{x}(xe^x - e^x + e^x)dx = -e^x + \frac{e^x}{x} + \int e^x dx = \frac{e^x}{x} + k$$

Quindi:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \int_1^2 \frac{e^x(x-1)}{x^2}dx = \left[\frac{e^x}{x}\right]_1^2 = \frac{e^2}{2} - e \cong 0.98$$

## QUESITO 6

*Si determini il punto della parabola* $4y = x^2$ *più vicino al punto di coordinate* $(6, -3)$.

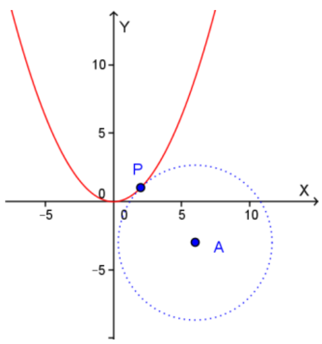
Indichiamo con $P = (x; y) = \left(x; \frac{1}{4}x^2\right)$ il generico punto della parabola e calcoliamo la distanza da punto dato $A = (6; -3)$.

$$PA = \sqrt{(x-6)^2 + \left(\frac{1}{4}x^2 + 3\right)^2}$$

Tale distanza è minima se lo è il suo quadrato $z = \frac{x^4}{16} + \frac{5x^2}{2} - 12x + 45$ .
Risulta:

$z' = \frac{1}{4}x^3 + 5x - 12 \geq 0 \quad se \quad x^3 + 20x - 48 \geq 0$ da cui, abbassando di grado con la regola di Ruffini, si ha:

$(x-2)(x^2+2x+24) \geq 0$ ed essendo $(x^2+2x+24) \geq 0 \quad \forall x$ poiché il delta è negativo, si ha che:
$z' \geq 0 \quad quando \quad x \geq 2$ : pertanto z cresce per $x > 2$ e decresce per $x < 2$ :
per $x = 2$ la distanza richiesta risulta minima.
Il punto della parabola più vicino ad A è quindi il punto di coordinate $(2; 1)$.



## QUESITO 7

*Si consideri l'equazione* $x^3 - 3x^2 + 6x - 6 = 0$*.*
*Si dimostri che essa ammette una soluzione reale* $x_0$ *tale che* $1 < x_0 < 2$*.*
*Avvalendosi di un qualsiasi procedimento iterativo si determini* $x_0$ *a meno di* $1/100$*.*

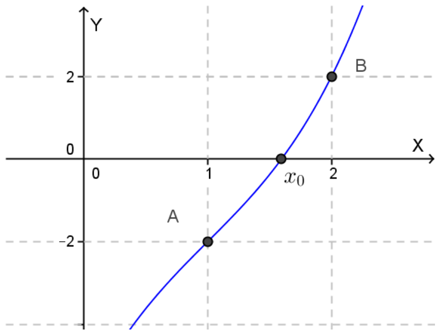
Consideriamo la funzione di equazione $g(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 6$ *e calcoliamo i valori che assume agli estremi dell'intervallo dato:*

$g(1) = 1 - 3 + 6 - 6 = -2 < 0,\qquad g(2) = 8 - 12 + 12 - 6 = 2 > 0$

Essendo la funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[1; 2]$, per il teorema degli zeri ammette almeno uno zero nell'aperto $(1; 2)$ , quindi l'equazione data ammette almeno una soluzione in tale intervallo. Dimostriamo che tale soluzione è unica.

$$g'(x) = 3x^2 - 6x + 6 \geq 0 \quad se \quad x^2 - 2x + 2 \geq 0 \quad \forall x$$

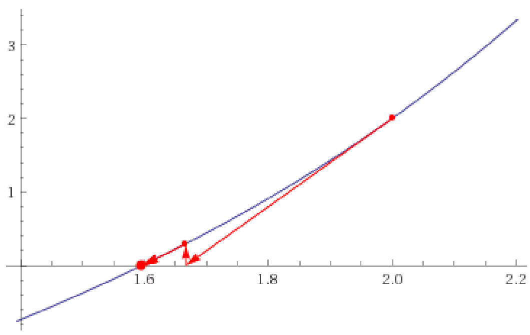
La funzione è quindi sempre crescente, pertanto il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle x: l'equazione ammette quindi una sola soluzione nell'intervallo $(1; 2)$.




Cerchiamo un valore approssimato a meno di 1/100 utilizzando il metodo di Newton.

Risulta:

$g''(x) = 6x - 6 > 0$ se x>1: quindi per 1<x<2 risulta $g''(x) \cdot g(1) < 0$, pertanto il punto iniziale dell'iterazione è $x_0 = b = 2$.



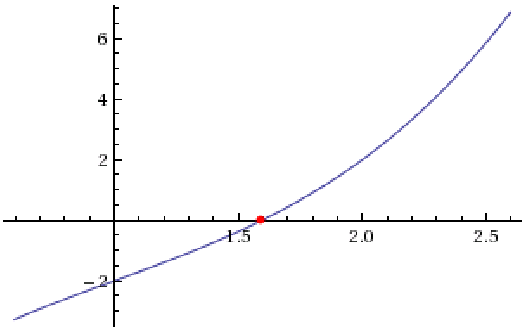
$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} = 2 - \frac{g(2)}{g'(2)} = 2 - \frac{2}{6} = \frac{5}{3} \cong 1.66667$$

$$x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} = \frac{5}{3} - \frac{g\left(\frac{5}{3}\right)}{g'\left(\frac{5}{3}\right)} = \frac{187}{117} \cong 1.5983$$

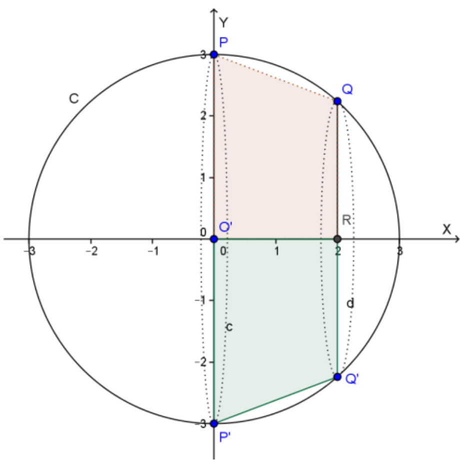
$$x_3 = x_2 - \frac{g(x_2)}{g'(x_2)} = \frac{187}{117} - \frac{g\left(\frac{187}{117}\right)}{g'\left(\frac{187}{117}\right)} \cong 1.5961$$

Quindi la radice approssimata a meno di 1/100 è $x_0 = 1.60$




## QUESITO 8

*Nel piano cartesiano $Oxy$ è dato il cerchio $C$ con centro nell'origine e raggio $r = 3$; siano $P(0,3)$ e $Q(2,\sqrt{5})$ punti di $C$. Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x del quadrilatero mistilineo PORQ (con R proiezione di Q sull'asse x).*




Il solido ottenuto è un segmento sferico a due basi, il cui volume è dato da:

$$V = \frac{1}{2}\pi h\left(\frac{1}{3}h^2 + r_1^2 + r_2^2\right)$$

Nel nostro caso:

$$h = OR = 2,\; r_1 = QR = \sqrt{5}\,, \quad r_2 = OP = 3$$

Quindi:

$$V = \frac{1}{2}\pi \cdot 2\left(\frac{4}{3} + 5 + 9\right) = \frac{46}{3}\pi$$

Calcoliamo il volume del solido senza ricorrere alla formula del volume del segmento sferico. Tale volume equivale a quello del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x dell'arco PQ. Se y=f(x) è l'equazione dell'arco PQ, il volume richiesto è dato da:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

L'equazione del cerchio è: $x^2 + y^2 = 9$, quindi $f^2(x) = y^2 = 9 - x^2$ , quindi:

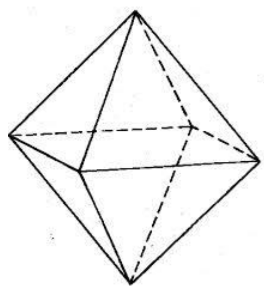
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_0^2 (9 - x^2)dx = \pi \left[9x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \pi\left(18 - \frac{8}{3}\right) = \frac{46}{3}\pi$$

## QUESITO 9

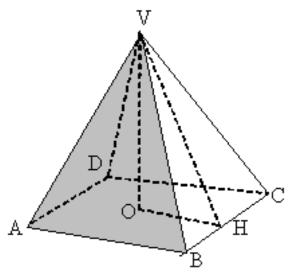
*Siano dati un ottaedro regolare di spigolo $l$ e la sfera in esso inscritta; si scelga a caso un punto all'interno dell'ottaedro. Si determini la probabilità che tale punto risulti interno alla sfera.*

Ricordiamo che il volume dell'ottaedro regolare di spigolo $l$ è:

$$V(ottaedro\ regolare) = \frac{l^3 \cdot \sqrt{2}}{3}$$



Questa formula si ottiene raddoppiando il volume della piramide regolare retta a base quadrata con spigoli tutti uguali ad $l$; infatti:



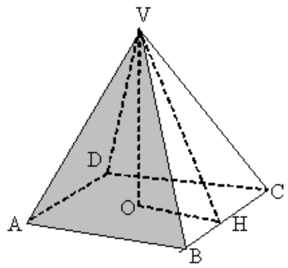

$$V(tetraedro) = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot VO$$

Ma $VO = \sqrt{VH^2 - OH^2} = \sqrt{\left(l\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}l^2} = l\frac{\sqrt{2}}{2}$ quindi:

$V(tetraedro) = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot l\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{6}l^3\sqrt{2}$ pertanto:

$$V(ottaedro\ regolare) = 2 \cdot \frac{1}{6}l^3\sqrt{2} = \frac{l^3 \cdot \sqrt{2}}{3}$$

Calcoliamo ora il raggio della sfera inscritta nell'ottaedro. Il centro della sfera coincide con il centro O dell'ottaedro.




Il raggio R della sfera inscritta è uguale alla distanza di O dalla faccia VBC, che equivale all'altezza del triangolo rettangolo VOH relativa all'ipotenusa VH, quindi:

$$R=\frac{OV\cdot OH}{VH}=\frac{l\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{l}{2}}{l\frac{\sqrt{3}}{2}}=l^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{2}{l\sqrt{3}}=l\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}$$

Il raggio della sfera inscritta in un ottaedro di spigolo $l$ è dato da $\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot l$

Il volume della sfera inscritta nell'ottaedro è quindi:

$$V(sfera\ inscritta)=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(l\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^3=\frac{4}{3}\pi l^3\cdot\frac{\sqrt{6}}{36}=\pi l^3\cdot\frac{\sqrt{6}}{27}$$

La probabilità richiesta è data da:

$$p=\frac{volume\ favorevole}{volume\ possibile}=\frac{V(sfera)}{V(ottaedro)}=\frac{\pi l^3\cdot\frac{\sqrt{6}}{27}}{\frac{l^3\cdot\sqrt{2}}{3}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}\cong 0.605\cong 60.5\%$$

## QUESITO 10

*Un'urna contiene 20 palline, che possono essere rosse o azzurre. Quante sono quelle azzurre, se, estraendo 2 palline senza riporre la prima estratta, la probabilità di estrarre almeno una pallina azzurra è 27/38 ?*


Ricordiamo che l'estrazione senza reimbussolamento equivale all'estrazione simultanea. Estraiamo due palline e calcoliamo la probabilità che siano entrambe ROSSE:

$$p(2\ R)=\frac{coppie\ favorevoli}{coppie\ possibili}=\frac{C_{x,2}}{C_{20,2}}=\frac{\binom{x}{2}}{\binom{20}{2}}=\frac{\frac{x(x-1)}{2}}{\frac{20\cdot 19}{2}}=\frac{x(x-1)}{380}$$

La probabilità che almeno una pallina sia azzurra è data da:

$p(almeno\ una\ azzura) = 1 - p(2\ rosse) = 1 - \frac{x(x-1)}{380} = \frac{27}{38}$ da cui:

$$380 - x(x-1) = 270\,,\ \ x^2 - x - 110 = 0\,,\ \ da\ cui\ \ x = 11\ \ \ (x = -10\ non\ accettabile)$$

Le palline azzurre sono quindi $20 - x = 20 - 11 = 9$

**Altro metodo:**

$$p(A-R) + p(R-A) + p(A-A) = \frac{20-x}{20} \cdot \frac{x}{19} + \frac{x}{20} \cdot \frac{20-x}{19} + \frac{20-x}{20} \cdot \frac{19-x}{19} = \frac{27}{38}$$

$$\frac{x(20-x)}{190} + \frac{(20-x)(19-x)}{380} = \frac{27}{38} \quad \Longrightarrow \quad 2x(20-x) + (20-x)(19-x) = 270$$

da cui $x = 9\ e\ x = -11$ come prima.

**N.B.**

$$p(1\ azzurra) + p(2azzurre) = \frac{11 \cdot 9}{C_{20,2}} + \frac{C_{9,2}}{C_{20,2}} = \frac{99}{190} + \frac{36}{190} = \frac{135}{190} = \frac{27}{38}$$