ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

E' data una circonferenza di centro *O* e diametro $\overline{AB} = 2.$ Sul prolungamento del diametro *AB*, dalla parte di *B*, si prenda un punto *P* e da esso si conduca una tangente alla circonferenza.

1. Detti *T* il punto di tangenza e *Q* il punto di intersezione di questa tangente con la tangente in *A* alla circonferenza, si calcoli il rapporto:

$$\frac{\overline{TQ}^2 + \overline{TP}^2}{\overline{AP}^2},$$

espresso in funzione di $x = \overline{BP}$, controllando che risulta :

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x}.$$

2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione *f(x)* e se ne tracci il grafico γ.
3. Si calcolino i numeri *a*, *b*, *c* in modo che risulti:

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+2}. \qquad (1)$$

4. Tenendo presente la scomposizione (1), si calcoli l'area della regione piana, limitata da γ, dal suo asintoto orizzontale e dalla retta d'equazione $x = 2$.

PROBLEMA 2

In un sistema di riferimento cartesiano *Oxy*, si denoti con Γ_a il grafico della funzione

$$f_a(x) = (x - a)\, e^{2 - \frac{x}{a}}$$

dove *a* è un parametro reale positivo ed *e* è il numero di *Nepero*.

1. Si dimostri che, al variare di *a*, le curve Γ_a tagliano l'asse delle *x* secondo lo stesso angolo α. Si determini l'ampiezza di α in gradi e primi sessagesimali.
2. Si dimostri che la tangente a Γ_a nel punto di flesso, descrive, al variare di *a*, un fascio di rette parallele. Si determini l'equazione di tale fascio.
3. Posto $a = 1$, si studi $f_1(x)$ e si tracci Γ_1.
4. Si calcoli l'area $S(k)$ della regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ_1, dall'asse *x* e dalla retta $x = k$, con $k > 1$. Cosa si può dire di $S(k)$ quando $k \to +\infty$?

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. In cima ad una roccia a picco sulla riva di un fiume è stata costruita una torretta d'osservazione alta 11 metri. Le ampiezze degli angoli di depressione per un punto situato sulla riva opposta del fiume, misurate rispettivamente dalla base e dalla sommità della torretta, sono pari a 18° e 24°. Si determini la larghezza del fiume in quel punto.
2. Considerata la funzione $f(x)=\dfrac{3^{3x}-a^x}{6^x-5^x}$, dove a è una costante reale positiva, si determini tale costante, sapendo che $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$.
3. Su un piano orizzontale α si pongono un cono circolare retto, il cui raggio di base è r e l'altezza $2r$, e una sfera di raggio r. A quale distanza x dal piano α bisogna segare questi due solidi con un piano orizzontale ß, perché la somma delle aree delle sezioni così ottenute sia massima?
4. Si dimostri che per gli zeri x_1 e x_2 di una funzione $f(x)=ax^2+bx+c$ vale la relazione $f'(x_1)+f'(x_2)=0$ e si dia una interpretazione geometrica della affermazione dimostrata.
5. Si calcoli il valore medio della funzione $f(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$, nell'intervallo $1 \le x \le 2$.
6. Si determini il punto della parabola $4y = x^2$ più vicino al punto di coordinate (6, -3).
7. Si consideri l'equazione
$$x^3-3x^2+6x-6=0.$$
Si dimostri che essa ammette una soluzione reale x_0 tale che $1 < x_0 < 2$. Avvalendosi di un qualsiasi procedimento iterativo si determini x_0 a meno di 1/100.
8. Nel piano cartesiano Oxy è dato il cerchio C con centro nell'origine e raggio $r = 3$; siano $P(0, 3)$ e $Q(2, \sqrt{5})$ punti di C. Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x del quadrilatero mistilineo $PORQ$ (con R proiezione di Q sull'asse x).
9. Siano dati un ottaedro regolare di spigolo l e la sfera in esso inscritta; si scelga a caso un punto all'interno dell'ottaedro. Si determini la probabilità che tale punto risulti interno alla sfera.
10. Un'urna contiene 20 palline, che possono essere rosse o azzurre. Quante sono quelle azzurre, se, estraendo 2 palline senza riporre la prima estratta, la probabilità di estrarre almeno una pallina azzurra è 27/38 ?

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.