ESAME DI STATO: Indirizzo Scientifico

Sessione ordinaria 2010

SECONDA PROVA SCRITTA

Tema di Matematica

(Santiago del Cile)[1]

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Sia f la funzione definita da

$$f(x) = (x^2 + 1)e^{-x+2} \quad \text{con} \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Nel piano riferito ad un sistema di riferimento cartesiano, si disegni il grafico λ di $f(x)$.

b) Si provi che la retta di equazione

$$y = \frac{5}{2}x$$

interseca λ nel punto Q di ascissa 2. Quale è l'equazione della retta tangente a λ in Q?

c) Sia

$$g(x) = (-x^2 - 2x - 3)e^{-x+2}.$$

Si calcoli $g'(x)$ e si deduca da essa una primitiva di $f(x)$.

d) Si calcoli l'area della regione del primo quadrante delimitata da λ, dall'asse x e dalla retta $x = 2$ e con l'aiuto di una calcolatrice se ne dia un valore approssimato arrotondato ai centesimi.

Problema 2

Sia $\overline{\mathrm{AC}}$ una corda della semicirconferenza di diametro $|\overline{\mathrm{AB}}| = 2$. Indicato con D il punto medio dell'arco BC si consideri il quadrilatero ABDC.

a) Si calcoli l'area di ABDC in funzione di $x = |\overline{\mathrm{AC}}|$.

b) Si calcoli l'area di ABDC in funzione di $\varphi = \mathrm{B\hat{A}C}$.

c) Per quali valori di x e di φ l'area del quadrilatero è massima? Quanto vale tale area? Sia T tale quadrilatero massimo.

d) Il quadrilatero T è la base di un solido che tagliato con piani ortogonali all'asse x dà tutte sezioni quadrate. Si calcoli il volume del solido.

[1] Testo tratto da http://www.batmath.it/esame/temi/tutti_temi.pdf

Questionario

1. Sia
$$f(x)=\begin{cases} x^2-5, & \text{se } x\le 3;\\ x+2, & \text{se } x>3.\end{cases}$$
Si trovi:
$$\text{a) } \lim_{x\to 3^-} f(x);\quad \text{b) } \lim_{x\to 3^+} f(x);\quad \text{c) } \lim_{x\to 3} f(x).$$
2. Sia t una retta e P un punto non appartenente ad essa. Si dimostri che le circonferenze di assegnato raggio r, passanti per P e con centro su t sono al più due.
3. Fra tutti i parallelepipedi rettangoli, a base quadrata, di superficie totale a^2 qual è quello di volume massimo ?
4. In un riferimento cartesiano Oxy, si tracci la curva d'equazione:
$$xy-x+y-1=0.$$
5. Si dimostri che il perimetro di un poligono regolare di n lati, inscritto in una circonferenza di raggio r, quando si fa tendere n all'infinito, tende alla lunghezza della circonferenza.
6. Si dimostri che se $f(x)$ è una funzione continua dispari definita in $\mathbb{R}$ allora
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=0,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$
7. Si provi che per tutti gli x reali, si ha:
$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x \quad \text{e} \quad \cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x.$$
8. Sia D la regione finita di piano delimitata dalla curva d'equazione
$$y=\sqrt{\sin x}$$
e dall'asse x nell'intervallo $0\le x\le \pi$. Si calcoli il volume del solido generato da D in una rotazione completa attorno all'asse delle x.