Scuole italiane all'estero (Santiago del Cile) 2010

PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita da: $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x+2}$, $con\ x \in R.$

a)

Nel piano riferito ad un sistema di riferimento cartesiano, si disegni il grafico λ *di f(x).*

La funzione è definita, continua e derivabile su tutto R. Essa è sempre positiva e taglia l'asse y nel punto $(0; e^2)$.

Limiti:

$\lim_{x\to-\infty}(x^2+1)e^{-x+2} = +\infty$ (non esiste asintoto obliquo poiché f(x)/x tende ancora a + infinito per x che tende a – infinito).

$\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)e^{-x+2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^x} = 0^+$: y=0 asintoto orizzontale per x che tende a + infinito.

Studiamo la derivata prima della funzione:

$f'(x) = 2x\, e^{-x+2} + (x^2+1)(-e^{-x+2}) = e^{-x+2}(2x - x^2 - 1) \geq 0\ se\ \ 2x - x^2 - 1 \geq 0\,,$

$x^2 - 2x + 1 \leq 0\,, \qquad (x-1)^2 \leq 0\ \ per\ x = 1.$

$Risulta\ f'(x) < 0\ per\ ogni\ x\ diverso\ da\ 1, che\ è\ un\ punto\ di\ flesso\ a\ tang.\ orizzontale.$

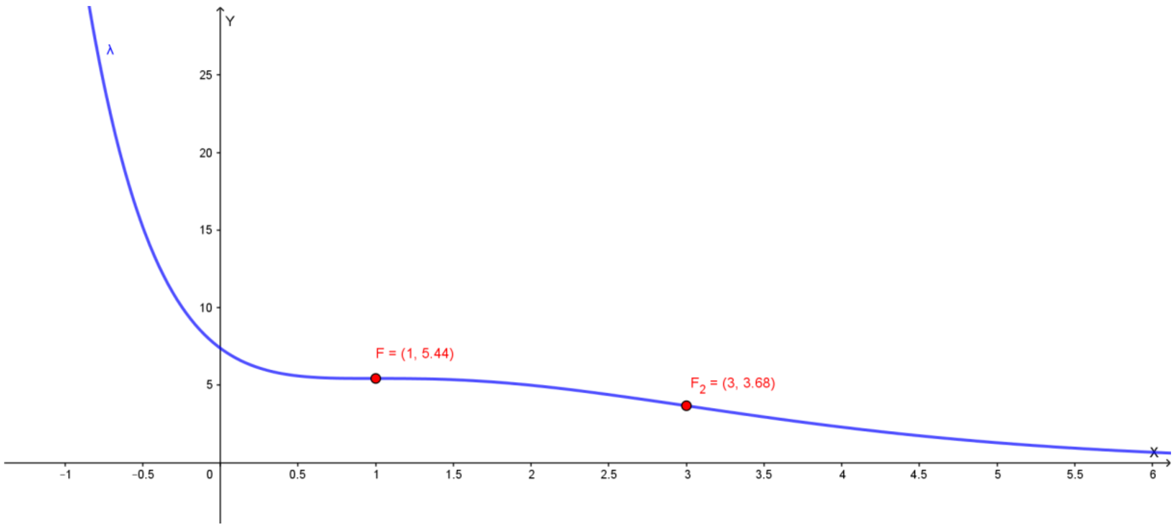
Il grafico quindi è sempre decrescente ed ha un flesso a tangente orizzontale in $F = (1; 2e)$.

Studiamo la derivata seconda:

$f''(x) = (2-2x)e^{-x+2} + (2x - x^2 - 1)(-e^{-x+2}) = (e^{-x+2})(2 - 2x - 2x + x^2 + 1) \geq 0\ \ se:$

$x^2 - 4x + 3 \geq 0:\ \ x \leq 1\ \ or\ \ x \geq 3$: il grafico volge quindi la concavità verso l'alto se x<1 oppure x>3 e verso il basso per 1<x<3.; x=1 e x=3 sono punti di flesso (il primo, come già visto, a tangente orizzontale). Il flesso di ascissa 3 è $F_2\left(3; \frac{10}{e}\right)$.

Il grafico della funzione è il seguente:

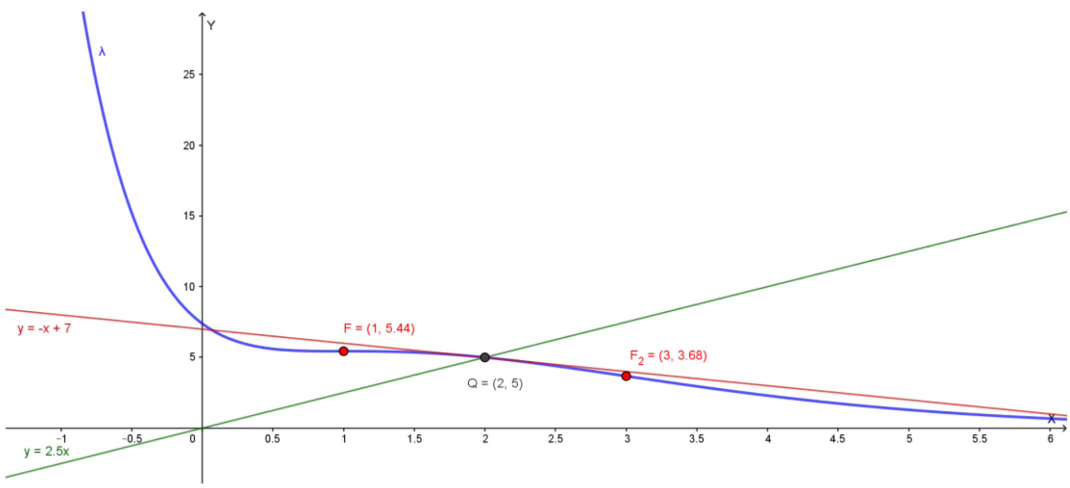


b)

Si provi che la retta di equazione $y = \frac{5}{2}x$ *interseca* λ *nel punto Q di ascissa 2. Qual è l'equazione della retta tangente a* λ *in Q?*

Per x=2 nella retta troviamo y=5 e lo stesso nella funzione f(x): i due grafici si intersecano quindi nel punto $Q = (2; 5)$.

Cerchiamo la tangente al grafico della funzione in Q. Risulta: $f'(2) = -1$, quindi la tangente ha equazione: $y - 5 = -(x - 2)$, $y = -x + 7$.



c)

Sia $g(x) = (-x^2 - 2x - 3)e^{-x+2}$. *Si calcoli* $g'(x)$ *e si deduca da essa una primitiva di f(x).*

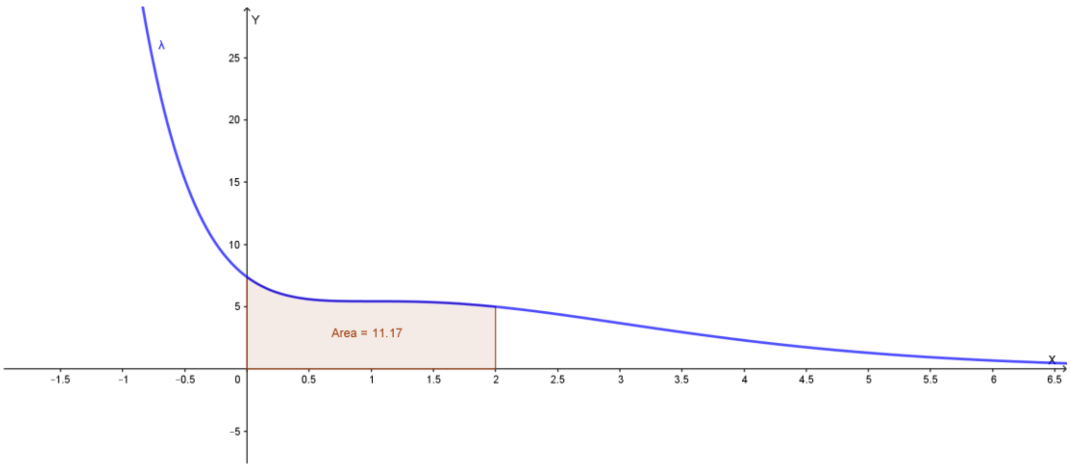
Si ha: $g'(x) = (-2x - 2)e^{-x+2} - (-x^2 - 2x - 3)e^{-x+2} = e^{-x+2}(x^2 + 1) = f(x)$

Quindi g(x) è una primitiva di f(x).

d)

Si calcoli l'area della regione del primo quadrante delimitata da λ*, dall'asse x e dalla retta x=2 e con l'aiuto di una calcolatrice se ne dia un valore approssimato arrotondato ai centesimi.*

Rappresentiamo la regione di cui si chiede l'area:



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area = \int_0^2 (x^2 + 1)e^{-x+2}\,dx = [(-x^2 - 2x - 3)e^{-x+2}]_0^2 = -11 - (-3e^2) = (3e^2 - 11)\,u^2 \cong$$

$$\cong 11.17\ \ u^2 = Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria