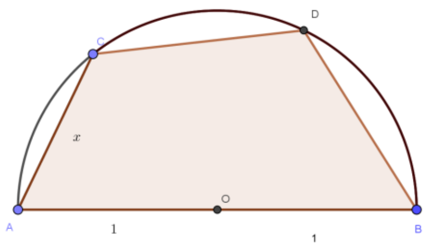
Scuole italiane all'estero (Santiago del Cile) 2010

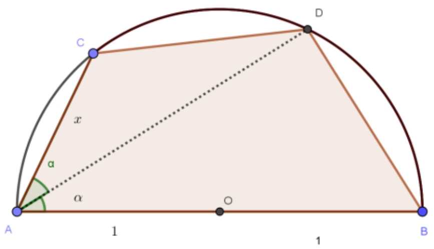
PROBLEMA 2

Sia AC una corda della semicirconferenza di diametro AB = 2. Indicato con D il punto medio dell'arco BC si consideri il quadrilatero ABDC.



a)

Si calcoli l'area di ABDC in funzione di x = AC.



Osserviamo che essendo gli archi CD e BD uguali, gli angoli CAD e DAB sono uguali perché insistono su archi uguali. Inoltre risulta: $0 \le x \le 2$

$Se\ x = 2, \qquad C \equiv B, \qquad Area(ABCD) = 0$.

$Se\ x = 0, \qquad C \equiv A,$

$\qquad ACDB\ diventa\ il\ triangolo\ rettangolo\ isoscele\ ADB\ di\ ipotenusa\ AB,$

ed è $quindi \quad Area(ABCD) = 1$).

Poniamo $C\hat{A}D = B\hat{A}D = \alpha$, $con\ \ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$. In generale si ha che il triangolo ABC è rettangolo in C e risulta $x = 2\cos(2\alpha) = 2\left(1 - 2sen^2(\alpha)\right)$.

Quindi: $\frac{x}{2} - 1 = -2sen^2(\alpha)$, $\ sen^2(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}, \ \ sen\,(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{2 - x}$.

Inoltre: $AD = 2\cos\alpha = 2\sqrt{1 - sen^2(\alpha)} = 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}(2 - x)} = 2\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x} = \sqrt{2 + x} = AD$

Perciò:

$Area(ABDC) = Area(ABD) + Area(ADC) = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot sen(\alpha) + \frac{1}{2} AD \cdot AC \cdot sen(\alpha) =$

$= \frac{1}{2} AD\ sen(\alpha)(AB + AC) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2+x} \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2-x}\right)(2+x) = \frac{1}{4}(2+x)\sqrt{4-x^2}, 0 \leq x \leq 2$

b)

Si calcoli l'area di ABDC in funzione di $\varphi = B\hat{A}C$.

Risulta $\varphi = B\hat{A}C = 2\alpha$, quindi:

$Area(ABDC) = Area(ABD) + Area(ADC) = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot sen(\alpha) + \frac{1}{2} AD \cdot AC \cdot sen(\alpha) =$

$= \frac{1}{2} AD\ sen(\alpha)(AB + AC) = \frac{1}{2} \cdot 2\ cos\alpha\ \cdot sen(\alpha)(2 + 2\cos(2\alpha)) =$

$= 2\ \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right)(1+\cos(\varphi)) = 2\ \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left(2\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)\ = 4\cos^3\frac{\varphi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) =$
$= sen(\varphi)(1+\cos(\varphi)) = Area(ABDC), \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

c)

Per quali valori di x e di φ l'area del quadrilatero è massima? Quanto vale tale area? Sia T tale quadrilatero massimo.

$Area(x) = \frac{1}{4}(2+x)\sqrt{4-x^2}, 0 \leq x \leq 2$

Questa Area è massima se lo è $y = (2+x)\sqrt{4-x^2}, 0 \leq x \leq 2$. Ma risulta:

$y' = \sqrt{4-x^2} + (2+x)\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-x^2-2x-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{-2x^2-2x+4}{\sqrt{4-x^2}} \geq 0\ \ se:$

$-2x^2 - 2x + 4 \geq 0, \quad x^2 + x - 2 \leq 0: \ -2 \leq x \leq 1$ e tenendo conto che $0 \leq x \leq 2$ risulta y crescente se $0 \leq x < 1$ e decrescente se $1 < x \leq 2$:
y (ed anche l'area) è massima se x=1 quindi $sen\ (\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{2-x} = \frac{1}{2}: \alpha = \pi/6, \ \ \varphi = 2\alpha = \frac{\pi}{3}$

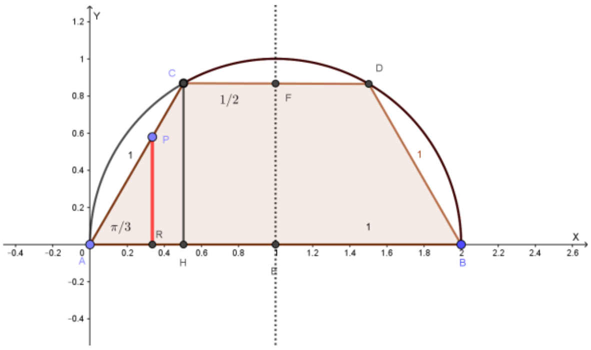
Risulta $BD = 2sen(\alpha) = 1$: il quadrilatero di area massima è il trapezio isoscele di lati obliqui e base minore uguali a 1.

$Area(massima) = \frac{1}{4}(2+x)\sqrt{4-x^2}\ \ per\ x = 1: quindi\ Area(massima) = \left(\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)\ \ u^2$

d)

Il quadrilatero T è la base di un solido che tagliato con piani ortogonali all'asse x dà tutte sezioni quadrate. Si calcoli il volume del solido.

Fissiamo l'asse x con origine nel vertice A e diretto verso B (vedi figura):



Il volume del solido è il doppio di quello generato dal trapezio AEFC.
La retta AC ha coefficiente angolare $m = tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, quindi la sua equazione è:
$y = \sqrt{3}\,x$

La parte ACH del trapezio AEFC genera un solido il cui volume è:

$V_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} A(x)\,dx$, essendo A(x) l'area del quadrato di lato $PR = \sqrt{3}\,x$, $A(x) = 3x^2$, quindi:

$$V_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} 3x^2\,dx = [x^3]_0^{1/2} = \frac{1}{8}$$

La parte HEFC genera un solido che è un parallelepipedo di base HEFC e altezza uguale ad $EF = \frac{\sqrt{3}}{2}$; il suo volume è quindi:

$$V_2 = Area(HEFC) \cdot EF = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{8}$$

Quindi AEFC genera un solido di volume:

$$V_1 + V_2 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

Il volume generato da T è quindi:

$$V = 2\left(\frac{1+3}{8}\right) = 1\ u^3$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria