Scuole italiane all'estero (Santiago del Cile) 2010 – Quesiti

QUESITO 1

Sia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5, & se\ x \leq 3 \\ x + 2, & se\ x > 3 \end{cases}$$

Si trovi:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x)\ ; \quad \lim_{x \to 3^+} f(x)\ ; \quad \lim_{x \to 3} f(x)\ .$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (x^2 - 5) = 4^-\ ; \quad \lim_{x \to 3^+} (x + 2) = 5^+\ ; \quad \lim_{x \to 3} f(x) \quad NON\ ESISTE.$$

Osserviamo che la funzione presenta in x=3 una discontinuità di prima specie con salto 1

QUESITO 2

Sia t una retta e P un punto non appartenente ad essa. Si dimostri che le circonferenze di assegnato raggio r, passanti per P e con centro su t sono al più due.

Scegliamo il sistema di riferimento con l'asse x coincidente con la retta t e l'origine O tale che P appartenga all'asse y (ma distinto da O): $P = (0; p), con\ p \neq 0$.
Le circonferenze, di centro C=(a; 0), richieste sono del tipo:

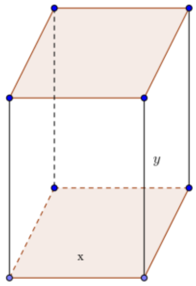
$$(x - a)^2 + y^2 = r^2$$

Osserviamo che $r > 0$; se fosse $r = 0$, non ci sarebbe alcuna circonferenza passante per P (essendo $p \neq 0$).

Siccome le circonferenze devono passare per P risulta: $a^2 + p^2 = r^2,\ a^2 = r^2 - p^2$.
Deve essere $r \geq p$.
Se $r = p\ si\ ha\ a = 0$: abbiamo una sola circonferenza (centro nell'origine e raggio $r = p$).
Se $r > p\ \ si\ ha\ a = \pm\sqrt{r^2 - p^2}$, quindi si hanno due circonferenze.

QUESITO 3

Fra tutti i parallelepipedi rettangoli, a base quadrata, di superficie totale a^2 qual è quello di volume massimo?



Detto x>0 il lato del quadrato di base e $y \geq 0$ l'altezza del parallelepipedo, risulta:

$$a^2 = 2x^2 + 4xy\,, \quad y = \frac{a^2 - 2x^2}{4x}$$

Osserviamo che $a^2 - 2x^2 \geq 0, quindi\colon\ x^2 \leq \frac{1}{2}a^2\,, \quad 0 < x \leq a/\sqrt{2}.$

Il volume del parallelepipedo è:

$$V = x^2y = \frac{1}{4}x(a^2 - 2x^2) = \frac{1}{4}xa^2 - \frac{1}{2}x^3, \quad con\ \ 0 < x \leq \frac{a}{\sqrt{2}}\ .$$

Risulta:

$$V' = \frac{1}{4}a^2 - \frac{3}{2}x^2 \geq 0\ \ se\ \ a^2 - 6x^2 \geq 0, \qquad \frac{-a}{\sqrt{6}} \leq x \leq \frac{a}{\sqrt{6}}\colon\ 0 < x \leq \frac{a}{\sqrt{6}}$$

Quindi V è crescente se $0 < x < \frac{a}{\sqrt{6}}$ e decrescente se $\frac{a}{\sqrt{6}} < x \leq \frac{a}{\sqrt{2}}$:

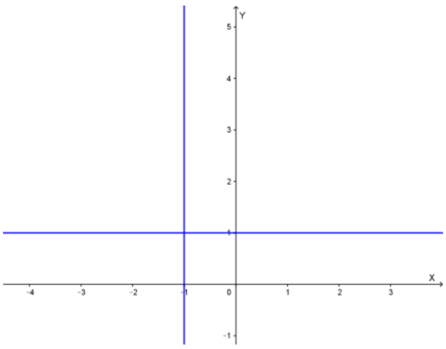
V è quindi massimo se $x = \frac{a}{\sqrt{6}}\ \ ed\ \ y = \frac{a^2-2x^2}{4x} = \frac{a^2-\frac{2a^2}{6}}{4\frac{a}{\sqrt{6}}} = \frac{2}{3}a^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{4a} = a\ \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{a}{\sqrt{6}} = y.$

Il parallelepipedo di volume massimo è il cubo di spigolo $\frac{a}{\sqrt{6}}$.

QUESITO 4

In un riferimento cartesiano Oxy, si tracci la curva d'equazione: $xy - x + y - 1 = 0$.

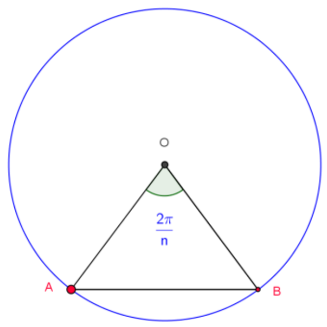
Si ha: $x(y-1) + (y-1) = 0,\ \ (y-1)(x+1) = 0$: coppia di rette y=1 e x=-1 (conica degenere in due rette perpendicolari, quindi iperbole degenere).



QUESITO 5

Si dimostri che il perimetro di un poligono regolare di n lati, inscritto in una circonferenza di raggio r, quando si fa tendere n all'infinito, tende alla lunghezza della circonferenza.

Indicando con O il centro della circonferenza e con AB il lato del poligono regolare inscritto di n lati, il perimetro del poligono si ottiene moltiplicando per n la misura di AB.



Osserviamo che l'angolo AOB vale, in radianti, $\frac{2\pi}{n}$, quindi il corrispondente angolo alla circonferenza, uguale alla metà, vale $\frac{\pi}{n}$; pertanto, per il teorema della corda, si ha:

$AB = 2r \cdot sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$, allora il perimetro del poligono è:

$2p_n = n \cdot 2r \cdot sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$; calcoliamo il limite per n che tende all'infinito di questo perimetro:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot 2r \cdot sen\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \pi \cdot 2r \cdot \left[\frac{sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}\right] = 2\pi r \cdot 1 = 2\pi r = lunghezza\ circonferenza.$$

QUESITO 6

Si dimostri che se f (x) è una funzione continua dispari definita in R allora

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0\,,\quad \forall x \in R\,.$$

Se la funzione è dispari risulta $f(-x) = -f(x)$. Si ha quindi:

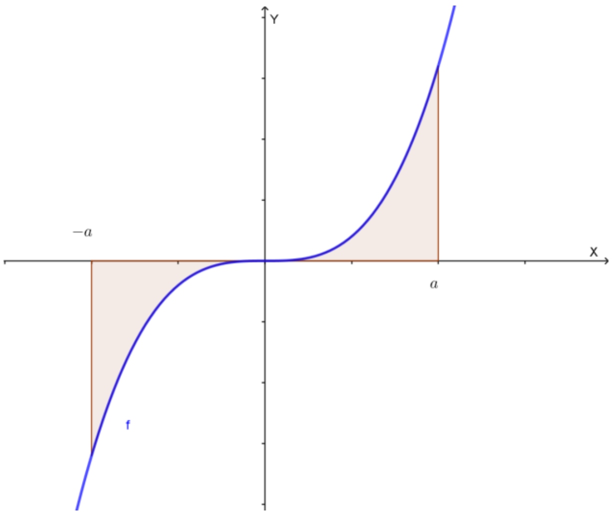
$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} -f(-x)\,dx = -\int_{-a}^{0} f(-x)\,dx$ e ponendo $-x = t, se\ x = -a,\ t = a$
$e\ se\ x = 0\,,\quad t = 0,\quad -dx = dt, quindi:$

$$-\int_{-a}^{0} f(-x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(t)\,(-dt) = \int_{a}^{0} f(t))\,dt = -\int_{0}^{a} f(t)\ dt = -\int_{0}^{a} f(x)\ dx$$

Pertanto:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\ dx, \qquad da\ cui:\ \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx = 0$$

Dimostrazione grafica.
L'area del trapezoide definito da f nell'intervallo [0;a] è uguale all'area definita da f nell'intervallo [-a; 0]; ma quest'ultima è uguale all'integrale da -a a 0 cambiato di segno, quindi l'integrale da -a ad a è 0.



QUESITO 7

Si provi che per tutti gli x reali, si ha:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \qquad e \qquad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \ .$$

Risulta:

$\sin(3x) = \sin(2x+x) = sen\ 2x\cos x + sen\ x\cos 2x\ =$
$= (2sen\ x\cos x)\cos x + sen\ x(1-2sen^2 x) = 2sen\ x\cos^2 x + senx - 2\ sen^3\ x =$
$= 2sen\ x\ (1-sen^2 x) + senx - 2\ sen^3\ x = 3\sin x - 4\sin^3 x \quad c.v.d.$

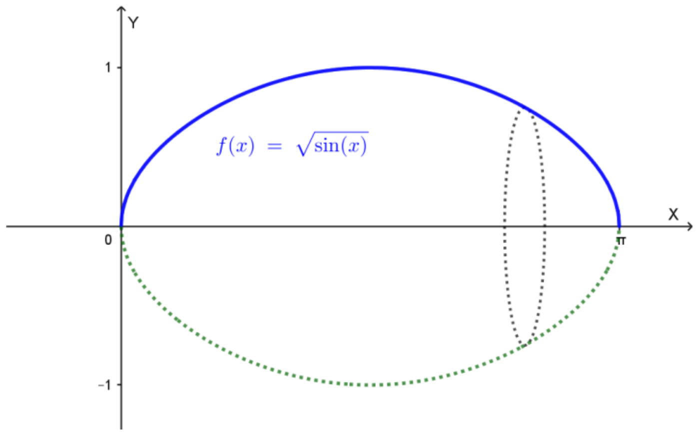
Analogamente si dimostra la seconda relazione:

$\cos 3x = \cos(2x+x) = cos\ 2x\cos x - \sin 2x\sin x =$
$= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin x\cos x\sin x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x\sin^2 x =$
$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x\,(1-\cos^2 x) = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x =$
$= 4\cos^3 x - 3\cos x \qquad c.v.d$

QUESITO 8

Sia D la regione finita di piano delimitata dalla curva d'equazione $y = \sqrt{\sin x}$ *e dall'asse x nell'intervallo* $0 \le x \le \pi$ *. Si calcoli il volume del solido generato da D in una rotazione completa attorno all'asse delle x.*

Osserviamo che la funzione nell'intervallo in questione è positiva per $0 < x < \pi$ e si annulla per $x = 0$ e $x = \pi$.



Pertanto:

$$V = \pi \int_0^{\pi} \left(\sqrt{\sin x}\right)^2 dx = \pi \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \pi[-\cos x]_0^{\pi} = \pi(1+1) = 2\pi = V$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria