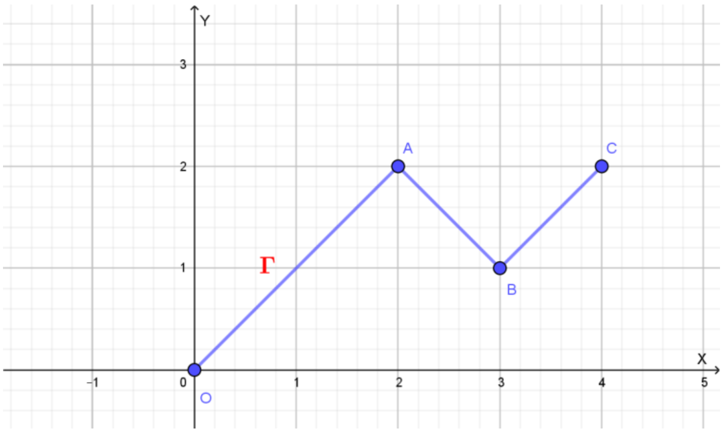
Scuole italiane all'estero (Santiago del Cile) 2010 Suppletiva

PROBLEMA 1

Nel piano riferito ad un sistema di riferimento cartesiano Oxy, si denoti con Γ *la spezzata OABC ove è: A(2, 2), B(3, 1), C(4, 2).*



a)

Si trovi la funzione polinomiale di grado minimo il cui grafico passi per O, A, B, C.

Vista la disposizione dei punti la funzione non può essere di secondo grado (parabola del tipo $y = ax^2 + bx + c$); vediamo se può essere una cubica, cioè una funzione del tipo:

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Dovendo passare per O deve essere d=0, quindi: $y = ax^3 + bx^2 + cx$
Imponiamo il passaggio per A, B e C:

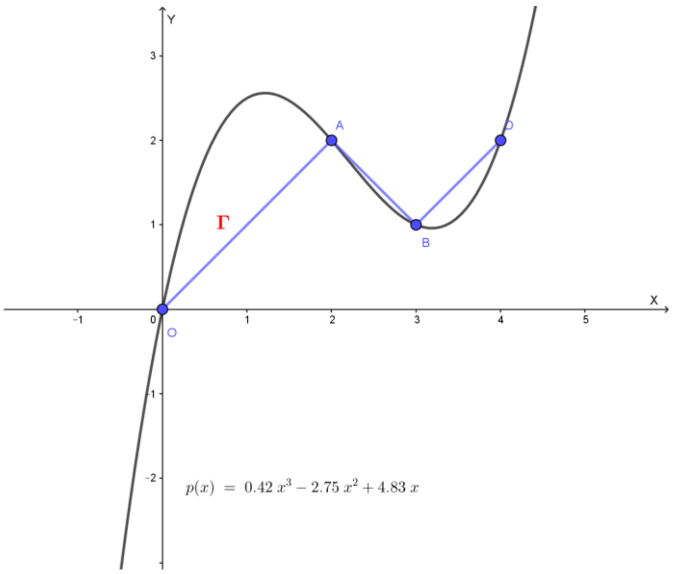
$$\begin{cases} 2 = 8a + 4b + 2c \\ 1 = 27a + 9b + 3c \\ 2 = 64a + 16b + 4c \end{cases} ; \begin{cases} c = 1 - 4a - 2b \\ 1 = 27a + 9b + 3 - 12a - 6b \\ 2 = 64a + 16b + 4 - 16a - 8b \end{cases} ; \begin{cases} c = 1 - 4a - 2b \\ -2 = 15a + 3b \\ -2 = 48a + 8b \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 1 - 4a - 2b \\ -2 = 15a + 3b \\ -2 = 48a + 8b \end{cases} ; \begin{cases} c = 1 - 4a - 2b \\ -2 = 15a + 3b \\ 0 = 33a + 5b \end{cases} ; \begin{cases} c = 1 - 4a - 2b \\ -2 = 15a - \frac{99}{5}a \\ b = -\frac{33}{5}a \end{cases} ; \begin{cases} c = 1 - 4a - 2b \\ -2 = -\frac{24}{5}a; \quad a = \frac{5}{12} \\ b = -\frac{33}{5} \cdot \frac{5}{12} = -\frac{11}{4} \end{cases}$$

$$c = 1 - \frac{20}{12} + \frac{22}{4} = 1 - \frac{5}{3} + \frac{11}{2} = \frac{29}{6}$$

Quindi la funzione richiesta è la cubica di equazione:

$$y = \frac{5}{12}x^3 - \frac{11}{4}x^2 + \frac{29}{6}x$$



b)

Si consideri la funzione f così definita:

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & se \quad 0 \le x < 2 \\ x^2 - 6x + 10\,, & se \quad 2 \le x \le 4 \end{cases}\,,$$

e si dica se essa è continua e derivabile per x = 2.

Per essere continua deve essere:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = 2$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x^2 - 6x + 10) = 2\,,\quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x) = 2$$

Quindi la funzione è continua per x=2.

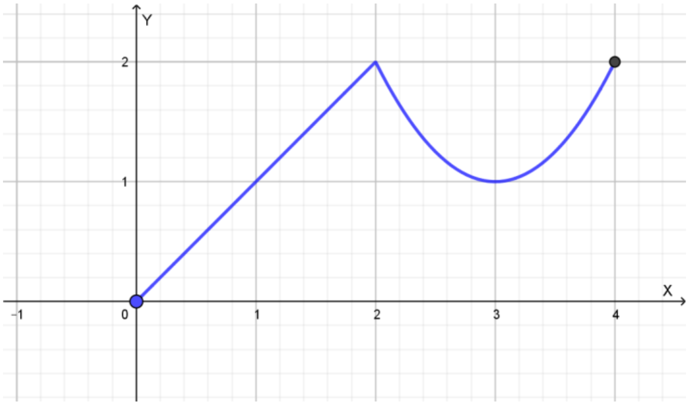
Studiamo la derivabilità in x=2.

Se x<2: $f'(x) = 1$, se x>2: $f'(x) = 2x - 6$. Quindi:

$$f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-}(1) = 1\,,\quad f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+}(2x - 6) = -2$$

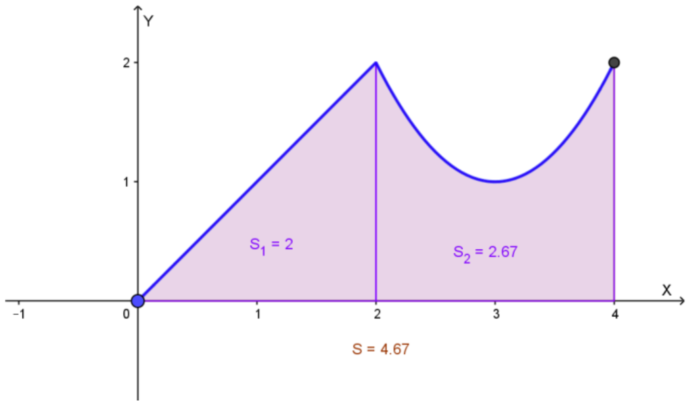
Quindi la funzione non è derivabile in x=2, dove presenta un punto angoloso.

Grafico della funzione:



c)

Si denoti con S la regione compresa tra il grafico di f e l'asse x per $0 \leq x \leq 4$. *Si calcoli l'area di S.*



Si ha:

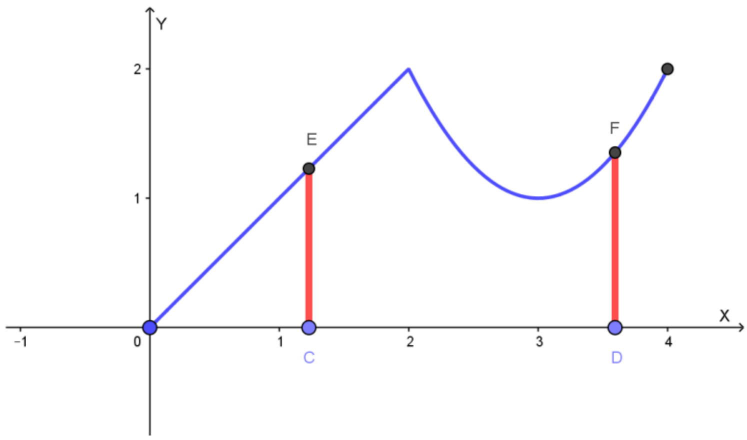
$$Area(S) = Area(S_1) + Area(S_2) = \frac{1}{2}(2)(2) + \int_2^4 (x^2 - 6x + 10)\, dx =$$

$$= 2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 10x\right]_2^4 = 2 + \left(\frac{64}{3} - 48 + 40 - \frac{8}{3} + 12 - 20\right) = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3} \cong 4.67\ u^2$$

d)

S è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliandolo con piani ortogonali all'asse x, sono tutte rettangoli la cui altezza è tripla della base. Si calcoli il volume di W.

Osserviamo la seguente figura:



Indichiamo con A(x) l'area del rettangolo di base EC; la sua altezza è 3EC. Indichiamo con B(x) l'area del rettangolo di base DF; la sua altezza è 3DF. Avremo quindi:

$$A(x) = EC \cdot 3EC = 3EC^2 = 3\,(x)^2 \;, \quad B(x) = DF \cdot 3DF = 3DF^2$$

$$B(x) = 3(x^2 - 6x + 10)^2 = 3(x^4 + 36x^2 + 100 - 12x^3 + 20x^2 - 120x)$$

Pertanto il volume richiesto è:

$$V = \int_0^2 A(x)\,dx + \int_2^4 B(x)\,dx =$$

$$= \int_0^2 3x^2\,dx + \int_2^4 3(x^4 + 36x^2 + 100 - 12x^3 + 20x^2 - 120x)\,dx$$

$$= [x^3]_0^2 + 3\left[\frac{1}{5}x^5 + 12x^3 + 100x - 3x^4 + \frac{20}{3}x^3 - 60x^2\right]_2^4 = 8 + \frac{56}{5} = \frac{96}{5}\ u^3 \cong 19.200\ u^3$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria