Scuole italiane all'estero (Santiago del Cile) 2010 Suppletiva

PROBLEMA 2

Nel piano è fissato il sistema di coordinate Oxy.

a)

Si determini l'equazione della parabola passante per $A(2,2)$ *e tangente in O alla retta* $y=-x$.

Supponiamo che la parabola sia con asse parallelo all'asse y:
La parabola, passando per O, è del tipo $y = ax^2 + bx$. Passando per A deve essere:

$2 = 4a + 2b,\ \ b = 1 - 2a\ ,\ \ quindi:\ \ y = ax^2 + (1-2a)x$. Imponiamo la tangenza alla retta $y=-x$:

$-x = ax^2 + (1-2a)x\ ,\ \ ax^2 + (2-2a)x = 0\ ,\qquad \Delta = 0:\ \ (2-2a)^2 = 0\,,\ \ a = 1$

Quindi la parabola ha equazione:

$$y = x^2 - x$$

b)

Si determini l'equazione della parabola passante per $A(2,2)$ *e tangente in O alla retta* $y=3x$.

Supponiamo che la parabola sia con asse parallelo all'asse y:
La parabola, passando per O, è del tipo $y = ax^2 + bx$. Passando per A deve essere:

$2 = 4a + 2b,\ \ b = 1 - 2a\ ,\ \ quindi:\ \ y = ax^2 + (1-2a)x$. Imponiamo la tangenza alla retta $y=3x$:

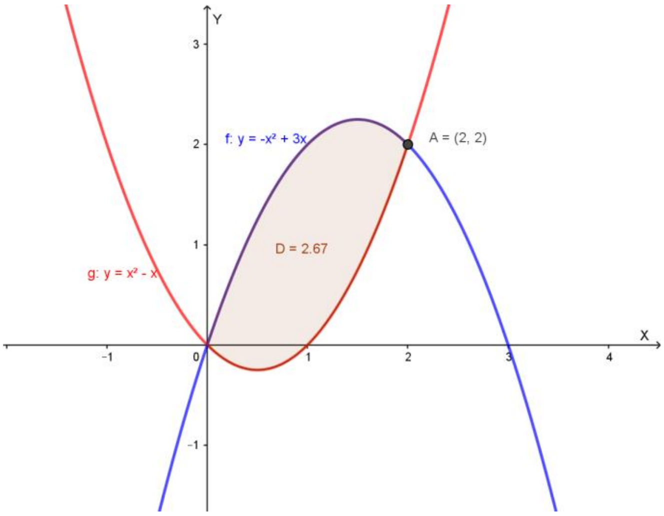
$3x = ax^2 + (1-2a)x\ ,\ \ ax^2 + (-2-2a)x = 0\ ,\qquad \Delta = 0:\ \ (-2-2a)^2 = 0\,,\ \ a = -1$

Quindi la parabola ha equazione:

$$y = -x^2 + 3x$$

c)

Sia D la parte di piano racchiusa tra le due parabole. Si calcoli l'area di D e si calcoli altresì il volume del solido che essa genera nella rotazione completa intorno all'asse y.



Prima parabola: $y = g(x) = x^2 - x\,,\quad vertice\ V_1 = \left(\frac{1}{2};\, -\frac{1}{4}\right)$.

Seconda parabola: $y = f(x) = -x^2 + 3x\,,\ \ vertice\ V_2 = \left(\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right)$.

L'area di D è data da:

$$Area(D) = \int_0^2 [-x^2 + 3x - (x^2 - x)]\,dx = \int_0^2 [-2x^2 + 4x]\,dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 =$$

$$= -\frac{16}{3} + 8 = \frac{8}{3}\ u^2 \cong 2.67\ u^2 = Area(D)$$

Per il calcolo del volume utilizziamo il metodo dei gusci cilindrici:

$$V = 2\pi \int_0^2 x[f(x) - g(x)]\,dx = 2\pi \int_0^2 x[-2x^2 + 4x]\,dx = 2\pi \int_0^2 [-2x^3 + 4x^2]\,dx =$$

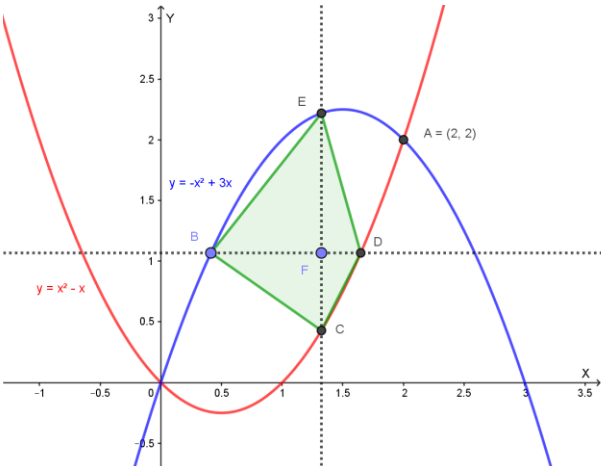
$$= 2\pi \left[-\frac{1}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3\right]_0^2 = 2\pi\left(-8 + \frac{32}{3}\right) = 2\pi\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{16}{3}\pi\ u^3 \cong 16.755\ u^3 = V$$

d)

Si inscriva in D il quadrilatero di area massima avente le diagonali parallele agli assi coordinati.

Siano $x = h$ ed $y = k$ le generiche rette parallele agli assi cartesiani. Deve essere:

$$0 < h < 2 \quad e \quad -\frac{1}{4} < k < \frac{9}{4} \ .$$



Cerchiamo i vertici del quadrilatero intersecando le due rette con le due parabole:

$$\begin{cases} x = h \\ y = -x^2 + 3x \end{cases} : \quad E = (h;\ -h^2 + 3h), \qquad con \quad 0 < h < 2$$

$$\begin{cases} x = h \\ y = x^2 - x \end{cases} : \qquad C = (h;\ h^2 - h), \qquad con \quad 0 < h < 2$$

$$\begin{cases} y = k \\ y = -x^2 + 3x \end{cases} : \quad x^2 - 3x + k = 0\,, \qquad x = \frac{3 - \sqrt{9 - 4k}}{2} \quad : \quad B = (\frac{3 - \sqrt{9 - 4k}}{2}\ ; k)$$

$$\begin{cases} y = k \\ y = x^2 - x \end{cases} : \quad x^2 - x - k = 0\,, \qquad x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4k}}{2} \quad : \quad D = (\frac{1 + \sqrt{1 + 4k}}{2}\ ; k)$$

L’area del quadrilatero BCDE, avendo le diagonali perpendicolari. È data da:

$$Area(BCDE) = \frac{BD \cdot CE}{2}$$

L'area è massima se lo sono le diagonali BD e CE:

$$BD = x_D - x_B = \frac{1+\sqrt{1+4k}}{2} - \frac{3-\sqrt{9-4k}}{2} = \frac{-2+\sqrt{1+4k}+\sqrt{9-4k}}{2}$$

BD è massima se lo è $z = -2+\sqrt{1+4k}+\sqrt{9-4k}\,,\ con\ \ -\frac{1}{4} < k < \frac{9}{4}$

$$z' = \frac{2}{\sqrt{1+4k}} - \frac{2}{\sqrt{9-4k}} = 2\cdot\frac{\sqrt{9-4k}-\sqrt{1+4k}}{\sqrt{1+4k}\,\sqrt{9-4k}} \geq 0\ \ se\ \ \sqrt{9-4k}-\sqrt{1+4k} \geq 0\,,$$

$$\sqrt{9-4k} \geq \sqrt{1+4k}\,,\ \ 9-4k \geq 1+4k\,,\ \ k \leq 1\ \ ,\ \ con\ \ -\frac{1}{4} < k < \frac{9}{4}$$

Quindi z (e BD) è crescente se $-\frac{1}{4} < k < 1$ e decrescente se $1 < k < \frac{9}{4}$.

Pertanto BD è massima se $k = 1$ e risulta: $B = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};1\right)\ e\ D = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};1\right)$

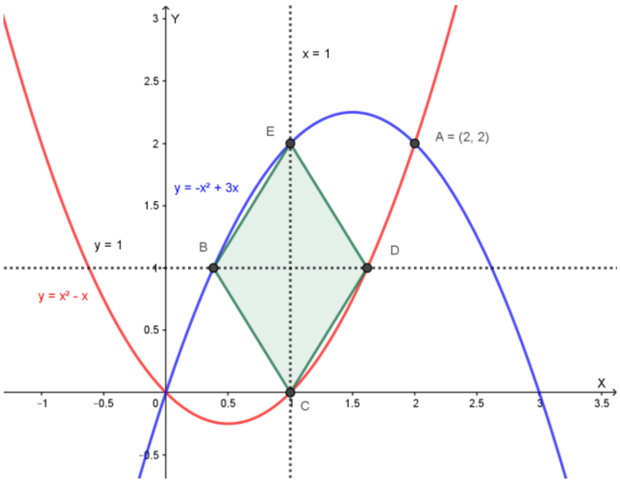
$$CE = y_E - y_c = -h^2+3h-(h^2-h) = -2h^2+4h\,,\ \ con\ 0 < h < 2$$

$CE = w = -2h^2+4h$ è massima nel vertice, cioè per $h = 1$ (che soddisfa $0 < h < 2$) ed è $CE(massima) = w_{massima} = -2+4 = 2$ e risulta $E = (1;2)\ e\ C = (1;0)$

In conclusione: il quadrilatero di area massima richiesto ha vertici:

$B = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};1\right)$, $C = (1;0)$, $E = (1;2)$, $D = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};1\right)$

Calcolando la misura dei lati si scopre che BCDE è un rombo.



Con la collaborazione di Angela Santamaria