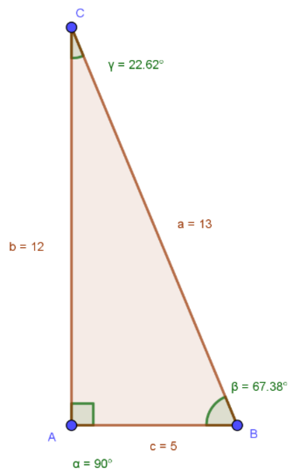
Scuole italiane all'estero (Santiago del Cile) 2010 suppletiva– Quesiti

QUESITO 1

Le misure dei lati di un triangolo sono 5, 12 e 13 dm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.

Osserviamo che il triangolo è rettangolo, essendo le misure dei lati una terna pitagorica:



Si ha: $\sin\beta = \frac{12}{13}$, $\beta = \arcsin\left(\frac{12}{13}\right) = 67.38° \cong 67°23'$

Quindi $\gamma = 90° - 67°23' = 22°37'$

QUESITO 2

Sia

$$F(x) = a\sin^3 x + b\sin x + 2x.$$

Si determinino le costanti a e b in modo che F (x) sia una primitiva della funzione

$$f(x) = \cos^3 x - 3\cos x + 2\,.$$

F è una primitiva di f se: $F'(x) = f(x)$. Deve essere (per ogni x)

$$F'(x) = 3\,\mathrm{a}\sin^2 x\,cosx + b\cos x + 2 = \cos^3 x - 3\cos x + 2\,,da\ cui:$$

$$= 3a\sin^2 x + b = \cos^2 x - 3\ ,\quad 3a(1-\cos^2 x) + b = \cos^2 x - 3\ ,$$

$$-3a\cos^2 x + 3a + b = \cos^2 x - 3, \text{ da cui:}$$

$$\begin{cases} -3a = 1 \\ 3a + b = -3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} a = -\dfrac{1}{3} \\ b = -3 - 3a = -3 + 1 = -2 \end{cases}$$

Quindi deve essere: $a = -\frac{1}{3}$ e $b = -2$.

QUESITO 3

Si risolva l'equazione:

$$4\binom{n}{4} = 15\binom{n-2}{3}.$$

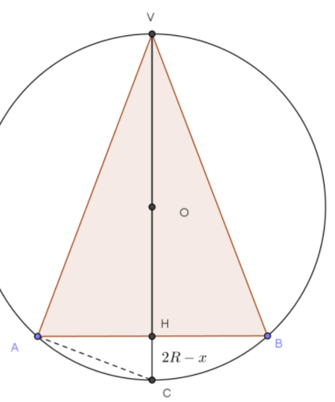
Osserviamo che deve essere n $naturale$ e: $n \geq 4$ ed $n - 2 \geq 3$: $n \geq 5$. $Quindi$ $n \geq 5$.
L'equazione equivale a:

$$4 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = 15 \cdot \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3!}$$

$$\frac{n(n-1)}{3!} = 15 \cdot \frac{(n-4)}{3!} \;, \quad n^2 - n = 15n - 60 \;, \quad n^2 - 16n + 60 = 0: \quad n = 6 \;\; ed \; n = 10$$

QUESITO 4

Si inscriva in una sfera di raggio R il cono rotondo di massimo volume.



Sia R il raggio della sfera e indichiamo con x l'altezza del cono VH (in figura è rappresentata una sezione del cono inscritto nella sfera ottenuta con un piano passante per il vertice V del cono e per la retta della sua altezza VH). Risulta:

$$0 < x < 2R$$

Per il secondo teorema di Euclide si ha:

$$AH^2 = VH \cdot HC = x(2R - x)$$

Il volume del cono inscritto è quindi (r raggio del cono):

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\, AH^2 \cdot VH = \frac{1}{3}\pi \cdot x(2R-x).x = \frac{1}{3}\pi \cdot x^2(2R-x)$$

V è massimo se lo è: $y = x^2(2R-x) = (x)^2(2R-x)$

Trattandosi del prodotto di due potenze la cui somma delle basi è costante (x+2R-x=2R) esso è massimo se le basi sono proporzionali agli esponenti, quindi:

$$\frac{x}{2} = \frac{2R-x}{1}\ ,\ 3x = 4R\ ,\ x = \frac{4}{3}R$$

Allo stesso risultato si perviene dallo studio della derivata della funzione $y = x^2(2R-x)$

$$y' = 2x(2R-x) - x^2 = -3x^2 + 4xR \geq 0 \quad se \quad 3x^2 - 4xR \leq 0:\ \ 0 \leq x \leq \frac{4}{3}R$$

La funzione, continua, è quindi crescente se $0 < x < \frac{4}{3}R$ e decrescente se $\frac{4}{3}R < x < 2R$: è quindi massima se $x = \frac{4}{3}R$.

QUESITO 5

Sia P un punto del piano di coordinate $(a\, cos\, t\, , b\, sin\, t\,)$ dove è $0 \leq t \leq 2\pi$. Al variare di t il punto P descrive un luogo geometrico. Quale o quali proprietà geometriche caratterizzano tale luogo?

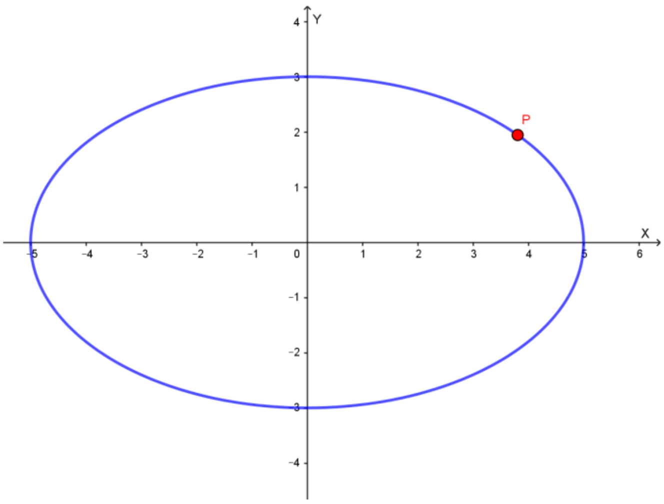
Il luogo in forma parametrica è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} , \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Eliminando il parametro si ha:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\ ,\ \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Il luogo descritto da P è quindi un’ellisse con il centro nell’origine degli assi cartesiani, con assi gli assi cartesiani e semiassi a e b. Per esempio con a=5 e b=3 abbiamo:



[Guarda animazione Geogebra.]

QUESITO 6

Si dimostri che esiste almeno un punto dell'intervallo $]0;\ \pi/4[$ *nel quale i grafici delle funzioni*

$$f\ (x)\ =\ sin\ x\ + 2x\ cos\ x\ + 1 \quad e \quad g\ (x)\ =\ 2x\ sin\ x\ + cos\ x\ + tan\ x$$

hanno tangenti parallele.

Deve risultare $f'(x) = g'(x)$ in almeno un punto dell'intervallo $]0;\ \pi/4[$; cioè deve esistere almeno un punto c appartenente all'intervallo $]0;\ \pi/4[$ tale che $f'(c) = g'(c)$.

Osserviamo che le due funzioni soddisfano le ipotesi del Teorema di Cauchy nell'intervallo $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$. Infatti f e g sono continue in tale intervallo, sono derivabili nell'intervallo aperto $]0;\frac{\pi}{4}[$ ed in quest'ultimo intervallo la derivata di g non si annulla mai, essendo: $2\sin x + 2x\cos x + 1 + \tan^2 x \neq 0$ in $]0;\frac{\pi}{4}[$ perché $2\sin x$ e $2x\cos x$ sono quantità positive in tale intervallo].

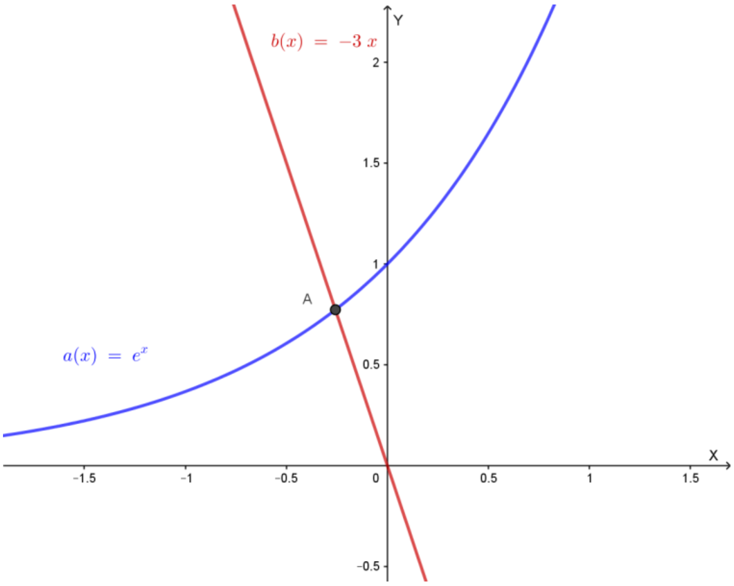
Pertanto, per il Teorema di Cauchy, esiste almeno un punto c appartenente all'intervallo $]0;\ \pi/4[$ tale che:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(0)}{g\left(\frac{\pi}{4}\right) - g(0)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1 - 1}{\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - 1} = 1, \quad quindi\ f'(c) = g'(c), \quad c.v.d.$$

QUESITO 7

Si dimostri che l'equazione $e^x + 3x = 0$ *ammette una ed una sola soluzione* α*. Si determini l'intervallo di ampiezza* 10^{-1} *cui* α *appartiene.*

Confrontiamo i grafici delle funzioni $a(x) = e^x$ e $b(x) = -3x$:



Si osserva facilmente che le due curve si intersecano in un solo punto, quindi l'equazione data ha una ed una sola soluzione.

La seconda richiesta equivale a trovare il valore della radice a meno di un decimo. Isoliamo la radice. Essendo $b(-1) > a(-1)\ e\ \ b(0) < a(0)$, la radice richiesta appartiene all'intervallo $[-1; 0]$.

*Possiamo quindi utilizzare il **metodo delle tangenti**.*

Posto $f(x) = e^x + 3x\ \ ed\ [a; b] = [-1; 0]$ osserviamo che $f(-1) < 0\ \ ed\ \ f(0) > 0$, inoltre la funzione è continua e derivabile nell'intervallo in questione ed è $f'(x) = e^x + 3$, $f''(x) = e^x > 0\ \ nell'intervallo\ in\ questione$. Pertanto: $f(a) \cdot f''(x) < 0$ per ogni x dell'intervallo, quindi dobbiamo assumere come punto iniziale nella formula iterativa di Newton il punto $x_0 = b = 0$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

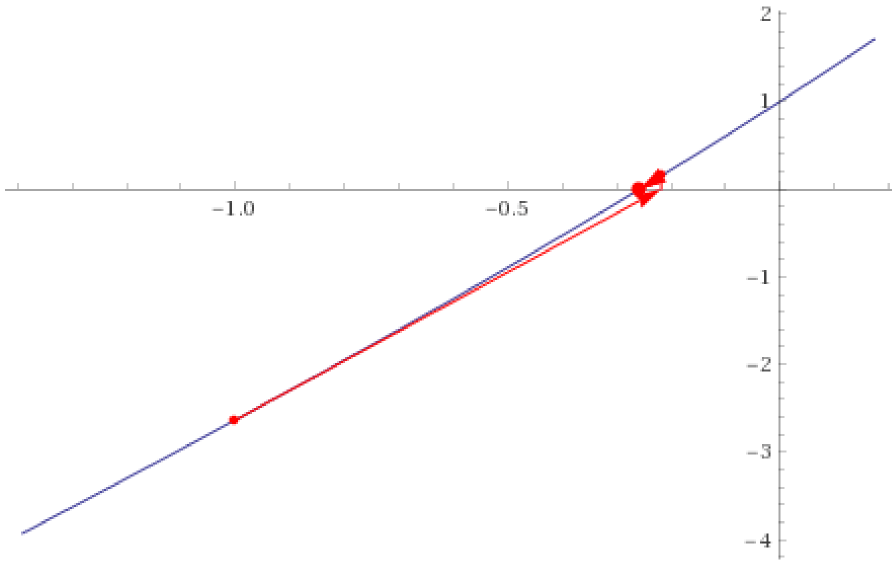
$f(x) = e^x + 3x \qquad f'(x) = e^x + 3$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = -\frac{1}{4} = -0.25$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -0.25 - \frac{f(-0.25)}{f'(-0.25)} \cong -0.26$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -0.26 - \frac{f(-0.26)}{f'(-0.26)} \cong -0.26$$

Quindi la radice è compresa fra -0.3 e -0.2 .



Usiamo il ***metodo di bisezione****:*

$$f(x) = e^x + 3x\,, \quad a = -1, b = 0\,, \qquad [a;b] = [-1;0], \quad f(a) = -2.63, \qquad f(b) = 1$$

$$c = \frac{a+b}{2} = -0.5\ ,\ f(c) = -0.89, \qquad c \to a\text{:}\ \ [-0.5;0]$$

$$c = \frac{a+b}{2} = -0.25\ ,\ f(c) = 0.03, \qquad c \to b\text{:}\ \ [-0.5;-0.25]$$

$$c = \frac{a+b}{2} = -0.38\ ,\ f(c) = -0.46, \qquad c \to a\text{:}\ \ [-0.38;-0.25]$$

$$c = \frac{a+b}{2} = -0.32\ ,\ f(c) = -0.23, \qquad c \to a\text{:}\ \ [-0.32;-0.25]$$

$$c = \frac{a+b}{2} = -0.29\ ,\ f(c) = -0.12, \qquad c \to a\text{:}\ \ [-0.29;-0.25]$$

Quindi la radice richiesta, a meno di 1 decimo, è -0.2 (è compresa fra - 0.3 e - 0.2).

QUESITO 8

Si calcoli

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}\ .$$

Il limite è $+\infty$, poiché si dimostra che n^n è infinito di ordine superiore rispetto a $n!$ per $n \to +\infty$.

Provando ad applicare il criterio del rapporto alla successione $a_n = \frac{n^n}{n!}$ si avrebbe:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n\cdot n}{n!\,(n+1)}\cdot\frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)} = 1$$

quindi non possiamo concludere nulla (se il limite l fosse stato $0 \le l < 1$ allora la successione avrebbe avuto limite 0, se invece $l > 1$ la successione avrebbe avuto limite infinito).

N.B.

Si può utilizzare la formula di **Stirling** per approssimare $n!$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad per\ n \to +\infty$$

Quindi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}} = +\infty$$

poiché e^n è infinito di ordine superiore rispetto a $\sqrt{2\pi n}$ per $n \to +\infty$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria