ESAME DI STATO: Indirizzo Scientifico

Sessione suppletiva 2010

SECONDA PROVA SCRITTA

Tema di Matematica

(Santiago del Cile)[1]

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Nel piano riferito ad un sistema di riferimento cartesiano Oxy, si denoti con Γ la spezzata OABC ove è: $A(2,2)$, $B(3,1)$, $D(4,2)$.

a) Si trovi la funzione polinomiale di grado minimo il cui grafico passi per O, A, B, C.

b) Si consideri la funzione f così definita:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 2, \\ x^2 - 6x + 10, & \text{se } 2 \leq x \leq 4, \end{cases}$$

e si dica se essa è continua e derivabile per $x = 2$.

c) Si denoti con S la regione compresa tra il grafico di f e l'asse x per $0 \leq x \leq 4$. Si calcoli l'area di S.

d) S è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliandolo con piani ortogonali all'asse x, sono tutte rettangoli la cui altezza è tripla della base. Si calcoli il volume di W.

Problema 2

Nel piano è fissato il sistema di coordinate Oxy.

a) Si determini l'equazione della parabola passante per $A(2,2)$ e tangente in O alla retta $y = -x$.

b) Si determini l'equazione della parabola passante per $A(2,2)$ e tangente in O alla retta $y = 3x$.

c) Sia D la parte di piano racchiusa tra le due parabole. Si calcoli l'area di D e si calcoli altresì il volume del solido che essa genera nella rotazione completa intorno all'asse y.

d) Si inscriva in D il quadrilatero di area massima avente le diagonali parallele agli assi coordinati.

Questionario

1. Le misure dei lati di un triangolo sono 5, 12 e 13 dm . Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.

2. Sia
$$F(x) = a \sin^3 x + b \sin x + 2x.$$
Si determinino le costanti a e b in modo che $F(x)$ sia una primitiva della funzione
$$f(x) = \cos^3 x - 3\cos x + 2.$$

[1] Testo tratto da http://www.batmath.it/esame/temi/tutti_temi.pdf

3. Si risolva l'equazione:

$$4\binom{n}{4} = 15\binom{n-2}{3}.$$

4. Si inscriva in una sfera di raggio r il cono rotondo di massimo volume.
5. Sia P un punto del piano di coordinate $(a\cos t, b\sin t)$ dove è $0 \leq t \leq 2\pi$. Al variare di t il punto P descrive un luogo geometrico. Quale o quali proprietà geometriche caratterizzano tale luogo?
6. Si dimostri che esiste almeno un punto dell'intervallo $]0, \pi/4[$ nel quale i grafici delle funzioni

$$f(x) = \sin x + 2x\cos x + 1 \quad \text{e} \quad g(x) = 2x\sin x + \cos x + \tan x$$

hanno tangenti parallele.

7. Si dimostri che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una ed una sola soluzione α. Si determini l'intervallo di ampiezza 10^{-1} cui α appartiene.
8. Si calcoli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

N.B.

Nel Problema 1 per errore è stato indicato con D invece che con C il punto (4,2)