ORDINAMENTO 2010 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 1

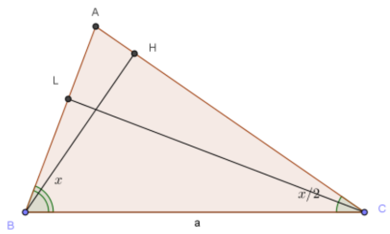
In un triangolo ABC, l'angolo in B è il doppio dell'angolo in C e inoltre è BC = a.

1)

Dette BH e CL, rispettivamente, le altezze del triangolo uscenti dai vertici B e C, si consideri il rapporto:

$$\frac{BH^2 + CL^2}{a^2}$$

espresso in funzione dell'angolo x = ABC.



Per quanto riguarda la limitazione della x si ha: $0 < \frac{3}{2}x < \pi$, $0 < x < \frac{2}{3}\pi$. Si ha poi:

$BH = a\ sen\left(\frac{x}{2}\right)$, $CL = a\ sen(x)$, quindi:

$$\frac{BH^2 + CL^2}{a^2} = \frac{a^2\ sen^2\left(\frac{x}{2}\right) + a^2\ sen^2(x)}{a^2} = sen^2\left(\frac{x}{2}\right) + sen^2(x)$$

2)

Si studi la funzione f (x) così ottenuta e si tracci il suo grafico γ *nell'intervallo* $0 \le x \le 2\pi$, *mettendo in evidenza poi la parte di grafico compatibile con i dati del problema.*

$$f(x) = sen^2\left(\frac{x}{2}\right) + sen^2(x) = \frac{1 - cosx}{2} + 1 - \cos^2 x = \boldsymbol{-\cos^2 x - \frac{1}{2}cosx + \frac{3}{2} = f(x)}$$

Dominio: $0 \le x \le 2\pi$

Intersezioni con gli assi:

Se x=0: y=0 ; se y=0: $-\cos^2 x - \frac{1}{2}cosx + \frac{3}{2} = 0$, $2\cos^2 x + cosx - 3 = 0$:

$cosx = 1 \ e \ cosx = -\frac{3}{2}, accettabile \ solo \ la \ prima: x = 0, x = 2\pi.$

Positività:

La funzione è positiva o nulla se $-\cos^2 x - \frac{1}{2}cosx + \frac{3}{2} \geq 0$, $2\cos^2 x + cosx - 3 \leq 0$

$-\frac{3}{2} \leq cosx \leq 1$: per ogni x.

Limiti:

Non occorre calcolare alcun limite, essendo la funzione continua in un intervallo chiuso e limitato.

Asintoti:

Non esistono asintoti.

Derivata prima:

$$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) + \frac{\sin(x)}{2} \geq 0 \quad se \quad 4\sin(x)\cos(x)\,x + sin(x) \geq 0 \,,$$

$$\sin(x)\,(4\cos(x) + 1) \geq 0$$

$$\sin(x) \geq 0: 0 \leq x \leq \pi$$
$$4\cos(x) + 1 \geq 0 \quad se \quad \cos(x) \geq -\frac{1}{4} \ ; posto \ \alpha = \arccos\left(\frac{1}{4}\right) risulta \cos(x) = -\frac{1}{4} \quad se$$

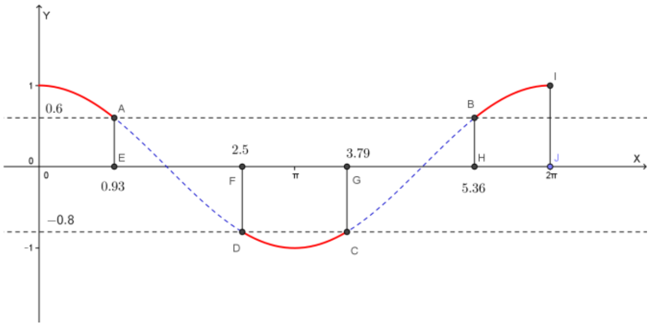
$$x = \pi - \alpha \quad e \quad x = \pi + a; \quad quindi \quad \cos(x) \geq -\frac{1}{4} \quad se \quad 0 \leq x \leq \pi - \alpha \quad vel \ \ \pi + a \leq x \leq 2\pi$$

Quindi risulta $f'(x) \geq 0 \ se \quad 0 \leq x \leq \ \pi - \alpha \quad vel \quad \pi \leq x \leq \ \pi + a$; pertanto la funzione è crescente se $0 < x < \ \pi - \alpha \quad e \ \ \pi < x < \ \pi + a$, decrescente nella parte rimanente. Abbiamo dei massimi relativi (ed anche assoluti) per $x = \ \pi - \alpha$ e $x = \ \pi + \alpha$ con ordinata:

$$f(\pi - \alpha) = f(\pi + \alpha) = -\cos^2(\pi - \alpha) - \frac{1}{2}\cos(\pi - \alpha) + \frac{3}{2} = -\cos^2 \alpha + \frac{1}{2}cos\alpha + \frac{3}{2} =$$
$$= -\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{3}{2} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

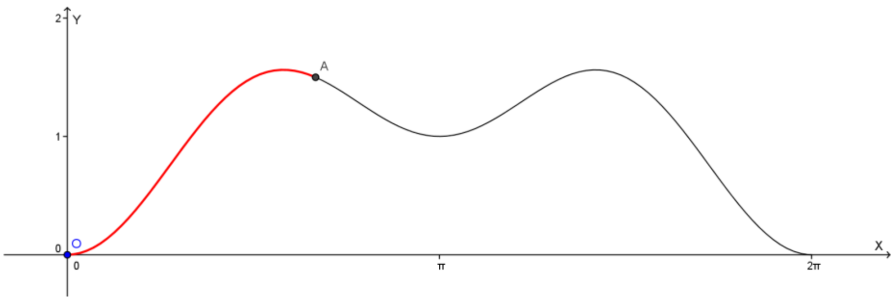
Derivata seconda:

$$f''(x) = 2\big(\cos(x)\big)^2 - 2\big(\sin(x)\big)^2 + \frac{\cos(x)}{2} \geq 0 \quad se \ \ 4(\cos(x))^2 + \frac{1}{2}\cos(x) - 2 \geq 0$$
$$8(\cos(x))^2 + \cos(x) - 4 \geq 0 \ ; \ \cos(x) \leq \frac{-\sqrt{129} - 1}{16} \cong -0.8 \,, \cos(x) \geq x = \frac{\sqrt{129} - 1}{16} \cong 0.6$$



Usando i valori approssimati abbiamo:
concavità verso l'alto se $0 < x < 0.93, 2.5 < x < 3.79$, $5.36 < x < 2\pi$.
Flessi nei punti di ascissa (approssimata): 0.93, 2.5, 3.79, 5.36 .

Grafico della funzione (con evidenziata la parte compatibile con i dati del problema):



3)

Si dimostri che γ è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.

Deve essere: $f(2\pi - x) = f(x)$

$$f(2\pi - x) = -\cos^2(2\pi - x) - \frac{1}{2}cos(2\pi - x) + \frac{3}{2} = -\cos^2(x) - \frac{1}{2}cos(x) + \frac{3}{2} = f(x)$$

4)

Si calcoli il valore medio della funzione f (x) nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi$.

Ricordiamo che il valor medio di una funzione f(x) continua in un intervallo [a; b] è dato da:

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\pi - 0} \cdot \int_0^\pi \left(-\cos^2(x) - \frac{1}{2}cos(x) + \frac{3}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \left(-\frac{1+cos(2x)}{2} - \frac{1}{2} cos(x) + \frac{3}{2} \right) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \left(-\frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{1}{2} \cos(x) + 1 \right) dx$$

Calcoliamo l'integrale indefinito:

$$\int \left(-\frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{1}{2} \cos(x) + 1 \right) dx = -\frac{1}{2} \int \cos(2x)\, dx - \frac{1}{2} sen(x) + x =$$

$$= -\frac{1}{4} sen(2x) - \frac{1}{2} sen(x) + x + c$$

Quindi:

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \left(-\frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{1}{2} \cos(x) + 1 \right) dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{4} sen(2x) - \frac{1}{2} sen(x) + x \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}(\pi) = 1$$

Il valor medio richiesto è 1.

Con la collaborazione di Angela Santamaria