ORDINAMENTO 2010 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 2

Sia data la funzione: $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$.

1)

Si verifichi che la curva che la rappresenta è simmetrica rispetto all'origine.

Dobbiamo dimostrare che: $f(-x) = -f(x)$. Ed infatti risulta:

$$f(-x) = \frac{-x^3}{x^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -f(x).$$

2)

Si studi tale funzione e se ne tracci il grafico γ *, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.*

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$$

Dominio:

$x \neq \pm 1\,, quindi \quad -\infty < x < -1, -1 < x < 1, 1 < x < +\infty$

Intersezioni con gli assi:

Se x=0: y=0 ; se y=0: x=0 .

Positività:

La funzione è positiva o nulla se $\frac{x^3}{x^2-1} \geq 0 :\ -1 < x \leq 0\,, x > 1.$

Limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = -\infty \ ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty\ ,\quad \lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to(1)^-}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty\ ,\quad \lim_{x\to(1)^+}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty$$

Asintoti:

Asintoti verticali: $x=-1, x=1$. Non esistono asintoti orizzontali, poiché i limiti all'infinito non sono finiti. Essendo la funzione razionale fratta con il grado del numeratore che supera di 1 il grado del denominatore avremo asintoto obliquo.

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3-x}=1$$

$$q=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{x^2-1}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}\right]=0$$

Abbiamo quindi l'asintoto obliquo $y=x\ \ per\ x\to\pm\infty$

Derivata prima:

$f'(x)=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}\geq 0\ \ se\quad x^4-3x^2\geq 0\ ,\ \ x^2(x^2-3)\geq 0:\ x\leq-\sqrt{3}\,, x\geq\sqrt{3}$; la derivata prima si annulla per x=0, dove c'è un flesso a tangente orizzontale.

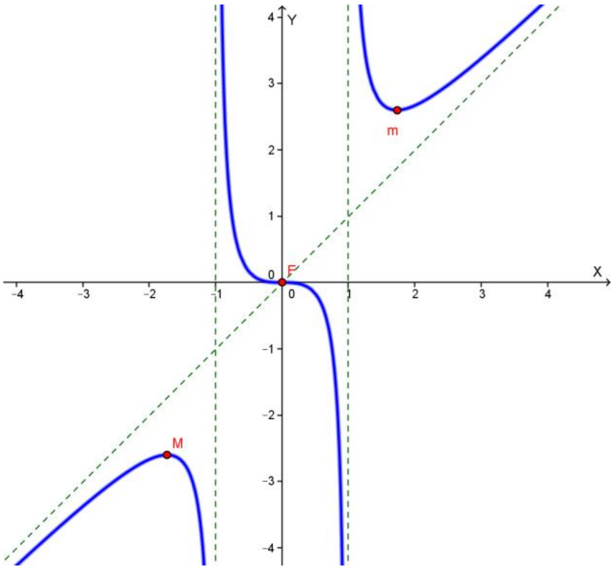
Quindi la funzione è crescente se $x<-\sqrt{3}$ or $x>\sqrt{3}$ ed è decrescente se $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$
Abbiamo quindi un massimo relativo per $x=-\sqrt{3}$, con ordinata $f\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{3}{2}\sqrt{3}\cong-2.6$ ed un minimo relativo per $x=\sqrt{3}$ con ordinata $f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{3}\cong 2.6$.

Derivata seconda:

$$f''(x)=\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}\geq 0\ \ se\quad \frac{x(2x^2+6)}{x^2-1}\geq 0\ ,\quad \frac{x}{x^2-1}\geq 0:\ -1<x\leq 0\ \ or\ \ x>1\ .$$

Quindi il grafico volge la concavità verso l'alto se $-1<x\leq 0\ \ or\ \ x>1$ e verso il basso se $x<-1\ or\ \ 0<x<1$. Avremo quindi un flesso per x=0, a tangente orizzontale, come già previsto dallo studio della derivata prima.

Grafico della funzione:



3)

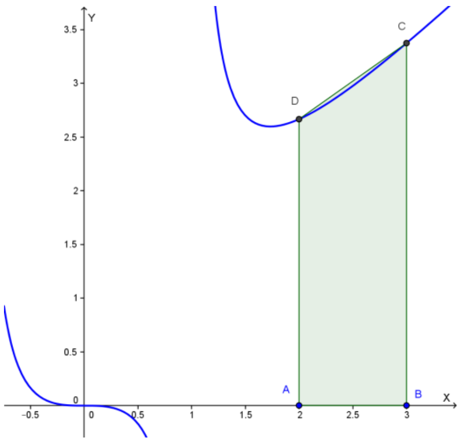
Si verifichi che $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} ln|x^2 - 1|$ *è una funzione primitiva di f (x).*

Deve essere: $F'(x) = f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$.

$$F'(x) = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{2x^3 - 2x + 2x}{2(x^2 - 1)} = \frac{x^3}{x^2 - 1} = f(x) \quad c.v.d.$$

4)

Si calcoli l'errore che si commette approssimando l'area racchiusa dalla curva γ *, dall'asse x e dalle rette x=2 e x=3 con l'area del trapezio ABCD, essendo A(2;0), B(3;0), C(3;f (3)) e D(2;f (2)).*



Intanto notiamo che: f(2)=8/3 , f(3)=27/8.

Pertanto l'area del trapezio è:

$$Area(ABCD) = \frac{\left(\frac{8}{3} + \frac{27}{8}\right) \cdot 1}{2} = \frac{145}{48} = 3.02$$

L'area del trapezoide individuato dalla curva e dalle rette x=2 e x=3 si ottiene mediante il seguente integrale:

$$\int_2^3 \frac{x^3}{x^2-1}\,dx = \int_2^3 \frac{x(x^2-1)+x}{x^2-1}\,dx = \int_2^3 x\,dx + \int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\,dx =$$

$$= \int_2^3 x\,dx + \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} ln|x^2-1|\right]_2^3 =$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\ln(8) - (2) - \frac{1}{2}\ln(3) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{3}\right) \cong 2.99$$

Quindi l'errore che si commette approssimando l'area del trapezoide con l'area del trapezio è uguale in valore assoluto a:

$$|Area(trapezio) - Area(trapezoide)| = \left|\frac{145}{48} - \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{3}\right)\right)\right| \cong 0.03$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria