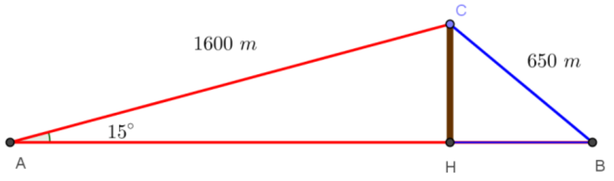
ORDINAMENTO 2010 – SESSIONE STRAORDINARIA - QUESITI

QUESITO 1

Due osservatori si trovano ai lati opposti di un grattacielo, a livello del suolo. La cima dell'edificio dista 1600 metri dal primo osservatore, che la vede con un angolo di elevazione di 15°. Se il secondo individuo si trova a 650 metri dalla cima del grattacielo, quale è la distanza tra i due osservatori (non tenendo conto dell'ostacolo grattacielo)?



Sia A l'osservatore da cui la cima del grattacielo dista 1600 m e B quello da cui la cima del grattacielo dista 650 m. Indichiamo con H la base del grattacielo (che assimiliamo ad un segmento) e C la cima del grattacielo. Avremo:

$AH = 1600\ cos15° \cong 1545.48\ m$; $CH = 1600\ sen(15°) \cong 414.11\ m$

Risulta quindi:

$BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{650^2 - 414.11^2} = 501.01\ m$

$AB = 1545.48\ m + 501.01\ m = 2046.49\ m$

La distanza tra i due osservatori è di circa 2046 metri.

QUESITO 2

Si calcoli il limite della funzione $(1 + \mathrm{tg}(x))^{cotg(x)}$ *quando x tende a 0.*

$$\lim_{x\to 0} (1 + \mathrm{tg}(x))^{cotg(x)} = \lim_{x\to 0} (1 + \mathrm{tg}(x))^{\frac{1}{tg(x)}} = e$$

Ricordiamo che dal limite notevole $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ segue che $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

e da quest'ultimo si deduce che, se $f(x) \to 0 \quad allora \quad [1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}$ tende ad e.

Nel nostro caso f(x)=tg(x).

QUESITO 3

In quanti modi 10 persone possono disporsi su dieci sedili allineati? E attorno ad un tavolo circolare?

Le dieci persone si possono sedere su dieci sedie allineate in un numero di modi pari alle permutazioni di 10 oggetti, cioè $10! = 3628800$.

Se le dieci persone siedono intorno ad un tavolo circolare, siccome una configurazione non cambia se ruotiamo le sedie, immaginiamo di occupare un posto con una persona qualsiasi. Gli altri nove posti possono essere occupati dalle nove persone rimanenti in $9! = 362880$ modi.

QUESITO 4

Si dimostri che ogni funzione $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *dove a, b, c, d sono valori reali con* $a \neq 0$*, ha un massimo e un minimo relativi oppure non ha estremanti.*

Osserviamo che la cubica al più infinito e al meno infinito ammette limiti infiniti di segno discorde:

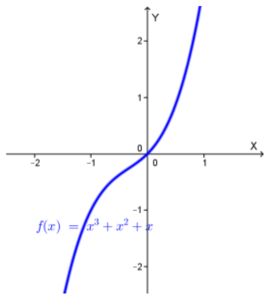
$\lim_{x\to\pm\infty}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \lim_{x\to\pm\infty}(ax^3) = \pm\infty$ se a>0 e $\mp\infty$ se a<0.

Analizziamo la derivata prima:

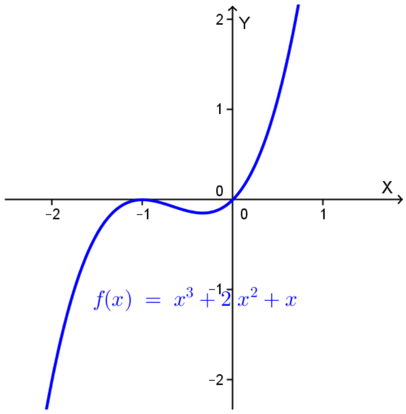
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Se $\frac{\Delta}{4} = b^2 - 3ac < 0$: non abbiamo punti a tangente orizzontale e la funzione è sempre crescente o decrescente (a seconda del segno di a); in tal caso la funzione non ammette estremanti.

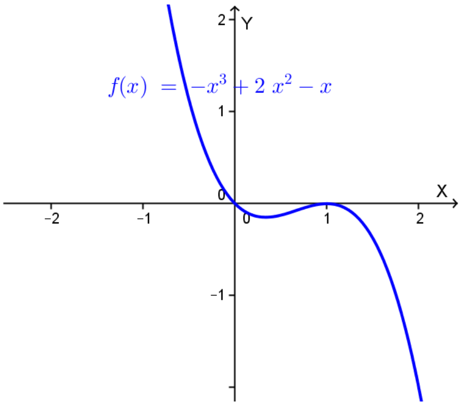
Esempio: b=1, a=1, c=1, d=0: $f(x) = x^3 + x^2 + x$



Se $\frac{\Delta}{4} = b^2 - 3ac > 0$: la funzione è crescente per valori esterni o interni all'intervallo con estremi le radici di $f'(x) = 0$ e quindi ammette un massimo ed un minimo relativi.
Esempio 1 (a>0): b=2, a=1, c=1, d=0: $f(x) = x^3 + 2x^2 + x$

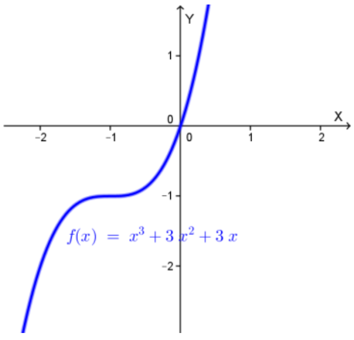


Esempio 2 (a<0): b=2, a=-1, c=-1, d=0: $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x$



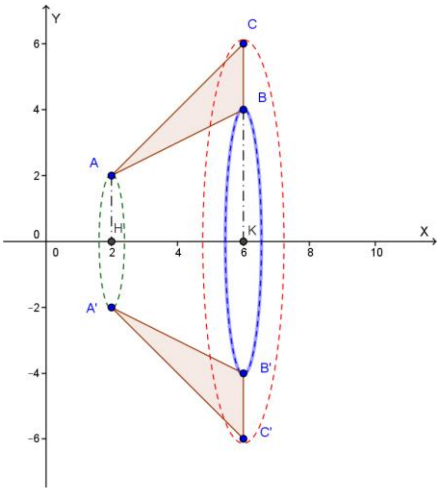
Se $\frac{\Delta}{4} = b^2 - 3ac = 0$ si ha che $f'(x) = 0$ in un solo punto ed $f'(x)$ è sempre positiva o negativa, quindi la funzione è sempre crescente: non ci sono estremanti.

Esempio: b=3, a=1, c=3, d=0: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$



QUESITO 5

Si calcoli il volume del solido generato da una rotazione completa attorno all'asse x del triangolo di vertici A(2, 2), B(6, 4), C(6, 6).



Il volume del solido richiesto si ottiene sottraendo al volume V_1 del tronco di cono di raggi AH=2 e CK=6 il volume V_2 del tronco di cono di raggi AH=2 e BK=6. Entrambi i coni hanno altezza HK=4. Quindi, ricordando che la formula per calcolare il volume del tronco di cono è:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot (R^2 + r^2 + Rr) \cdot h$$

abbiamo:

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\pi(6^2 + 2^2 + 6 \cdot 2) \cdot 4 - \frac{1}{3}\pi(4^2 + 2^2 + 4 \cdot 2) \cdot 4 = \frac{208}{3}\pi - \frac{112}{3}\pi = 32\,\pi \cong 101\,u^3$$

QUESITO 6

Si dica se esistono numeri reali per i quali vale la seguente uguaglianza:

$$2 + 2^x = sen^4 x + \cos^4 x + 6\, sen^2 x\, cos^2 x\ .$$

Osserviamo che il secondo membro dell'uguaglianza equivale a:

$$(sen^2 x + \cos^2 x)^2 + 4 sen^2 x\, cos^2 x = 1 + sen^2(2x) \leq 2$$

Il primo membro dell'uguaglianza risulta invece:

$$2 + 2^x > 2$$

Quindi l'uguaglianza non è mai verificata.

QUESITO 7

Sia P un punto del piano di coordinate $\left(t+\frac{1}{t}, t-\frac{1}{t}\right)$. *Al variare di t* ($t \neq 0$)*, P descrive un luogo geometrico del quale si chiede l'equazione cartesiana e il grafico.*

Il luogo in forma parametrica è:

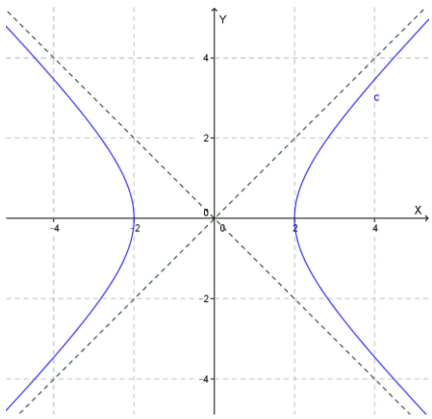
$\begin{cases} x = t + \frac{1}{t} \\ y = t - \frac{1}{t} \end{cases}$; per eliminare il parametro osserviamo che $x + y = 2t$, $t = \frac{x+y}{2}$

Sostituendo, per esempio, nella seconda equazione si ha:

$$y = t - \frac{1}{t} = y = \frac{x+y}{2} - \frac{2}{x+y} = \frac{(x+y)^2 - 4}{2(x+y)}, da\ cui:$$

$2y(x+y) = x^2 + 2xy + y^2 - 4$, $x^2 - y^2 = 4$

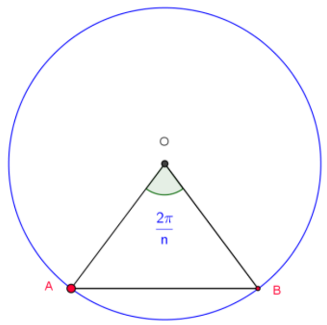
Il luogo è un'iperbole equilatera riferita agli assi cartesiani con asse trasverso l'asse x e vertici reali (-2;0) e (2;0). Il grafico è il seguente:



QUESITO 8

Si dimostri che il perimetro di un poligono regolare di n lati, inscritto in una circonferenza di raggio r , quando si fa tendere n all'infinito, tende alla lunghezza della circonferenza.

Indicando con O il centro della circonferenza e con AB il lato del poligono regolare inscritto di n lati, il perimetro del poligono si ottiene moltiplicando per n la misura di AB.



Osserviamo che l'angolo AOB vale, in radianti, $\frac{2\pi}{n}$, quindi il corrispondente angolo alla circonferenza, uguale alla metà, vale $\frac{\pi}{n}$; pertanto, per il teorema della corda, si ha:

$AB = 2r \cdot sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$, ed allora il perimetro del poligono è:

$2p_n = n \cdot 2r \cdot sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$; calcoliamo il limite per n che tende all'infinito di questo perimetro:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot 2r \cdot sen\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \pi \cdot 2r \cdot \left[\frac{sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}\right] = 2\pi r \cdot 1 = 2\pi r = lunghezza\ circonferenza.$$

QUESITO 9

Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \cos^3 x$ *nell'intervallo* $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Ricordiamo che il valor medio di una funzione f(x) continua in un intervallo [a; b] è dato da:

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 0} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \ \ dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \ \ dx$$

Calcoliamo l'integrale indefinito:

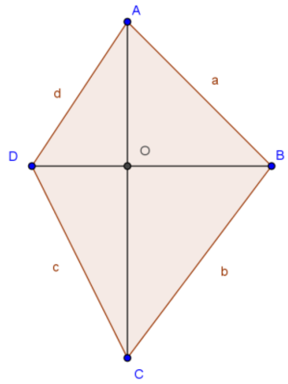
$$\int \cos^3 x \ \ dx = \int \cos x \ \cos^2 x \ \ dx = \int \cos x \ (1 - sen^2 x)\, dx = \int (\cos x \ - cosx\ sen^2 x) dx =$$
$$= \int cosx\ dx - \int \cos x\ sen^2 x\ dx = senx - \frac{1}{3} sen^3 x + C$$

Quindi:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \ \ dx = \frac{2}{\pi}\left[senx - \frac{1}{3} sen^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left[1 - \frac{1}{3}\right] = \frac{4}{3\pi} = valor\ medio$$

QUESITO 10

Si dimostri che se le diagonali di un quadrilatero sono perpendicolari, la somma dei quadrati di due lati opposti è uguale alla somma dei quadrati degli altri due.



Applicando il teorema di Pitagora si ha:

$a^2 + c^2 = (AO^2 + BO^2) + (CO^2 + DO^2)$

$b^2 + d^2 = (BO^2 + CO^2) + (AO^2 + DO^2)$

Si vede quindi facilmente che $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria