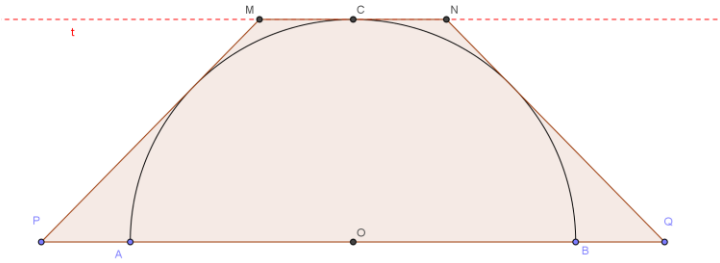
PNI 2010 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 1

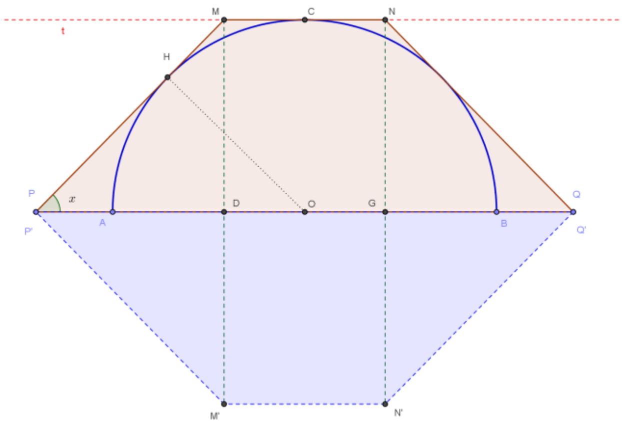
Sono dati: una semicirconferenza di centro O e diametro AB=2 e la tangente t parallela al diametro. Si prolungano i raggi OA ed OB di due segmenti uguali AP e BQ e dai punti P e Q si conducono le tangenti alla semicirconferenza, che intersecano la retta t rispettivamente nei punti M ed N.



1)

Si provi che l'area S(x) della superficie del solido generato in una rotazione completa del trapezio PQNM attorno alla retta PQ, è data da:

$$S(x) = 2\pi \cdot \frac{3 - 2\cos x}{\sin x} \ .$$



Il solido è formato da un cilindro e da due coni uguali con la base coincidente con la base del cilindro ed esterni al cilindro stesso. Indichiamo con x l'angolo OPM, con $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$.

$$S_l(cilindro) = 2\pi \cdot DG = 2\pi \cdot (2OD) = 4\pi \cdot OD = 4\pi \cdot (PO - PD) = 4\pi \cdot \left(\frac{OH}{sinx} - \frac{MD}{tgx}\right) =$$

$$= 4\pi \cdot \left(\frac{1}{sinx} - \frac{1}{tgx}\right) = 4\pi \cdot \frac{1 - cosx}{sinx}$$

$$S_l(cono) = \pi \cdot MD \cdot PM = \pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{sinx} = \frac{\pi}{sinx}$$

$S(solido) = S_l(cilindro) + 2S_l(cono) = 4\pi \cdot \frac{1-cosx}{sinx} + 2\frac{\pi}{sinx} = 2\pi \cdot \frac{3-2cosx}{sinx}$ c.v.d

2)

Si studi la funzione $f(x) = S(x)/(2\pi)$ *e se ne tracci il grafico* γ *nell'intervallo* $0 \le x \le 2\pi$, *mettendo in evidenza la parte di grafico compatibile con i dati del problema.*

Studiamo la funzione a prescindere dai limiti geometrici, cioè per $0 \le x \le 2\pi$; metteremo poi in evidenza la parte del grafico compatibile con i dati del problema, cioè $0 < x \le \frac{\pi}{2}$.
La funzione da studia ha equazione:

$$f(x) = \frac{S(x)}{2\pi} = \frac{3 - 2\cos x}{\sin x}$$

Dominio:

La funzione, nell'intervallo di studio $0 \le x \le 2\pi$ non è definita se $x = 0, x = \pi, x = 2\pi$; il dominio è quindi: $0 < x < \pi,\ \pi < x < 2\pi$.
Nell'intervallo di studio non ha senso chiedersi se la funzione è pari o dispari; in generale è comunque dispari, essendo $f(-x) = -f(x)$.

Intersezioni con gli assi:

x=0 non ha senso. Se y=0, $3 - 2\cos x = 0, cio$è $cosx = \frac{3}{2} : mai\ verificato$
Non ci sono quindi intersezioni con gli assi cartesiani.

Positività:

La funzione è positiva se $\frac{3-2\cos x}{\sin x} > 0$
N>0: $3 - 2\cos x > 0, \cos x < \frac{3}{2}, sempre$
D>0: $\sin x > 0,\ 0 < x < \pi.$

Quindi la funzione è positiva se $0 < x < \pi$.

Limiti:

$\lim_{x\to 0^+} \frac{3-2\cos x}{\sin x} = +\infty$, $\lim_{x\to \pi^-} \frac{3-2\cos x}{\sin x} = +\infty$, $\lim_{x\to \pi^+} \frac{3-2\cos x}{\sin x} = -\infty$,

$$\lim_{x\to 2\pi^-}\frac{3-2\cos x}{\sin x}=-\infty$$

Asintoti:

La funzione ha solo gli asintoti verticali: $x=0, x=\pi, x=2\pi$.

Derivata prima:

$f'(x)=\dfrac{2-3cosx}{\sin^2(x)}\geq 0\ \ se\ \ \ 2-3cosx\geq 0\,,\qquad cosx\leq\dfrac{2}{3}\ ;\ posto\ \ \alpha=arccos\left(\dfrac{2}{3}\right)(\cong 48°)$

Risulta $cosx\leq\frac{2}{3}$ se $\alpha\leq x\leq 2\pi-\alpha$; quindi la funzione (nel dominio) è crescente se $\alpha<x<2\pi-\alpha$ e decrescente se $0<x<\alpha\ \ vel\ \ 2\pi-\alpha<x<2\pi-\alpha$. Si ha quindi un minimo relativo se $x=\alpha$ ed un massimo relativo se $x=2\pi-\alpha$ con ordinate rispettivamente:

$f(\alpha)=\frac{3-2\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{3-\frac{4}{3}}{\sqrt{1-\frac{4}{9}}}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}\sqrt{5}}=\sqrt{5}\cong 2.24$ e $f(2\pi-\alpha\,)=-\sqrt{5}\cong -2.24$ . .

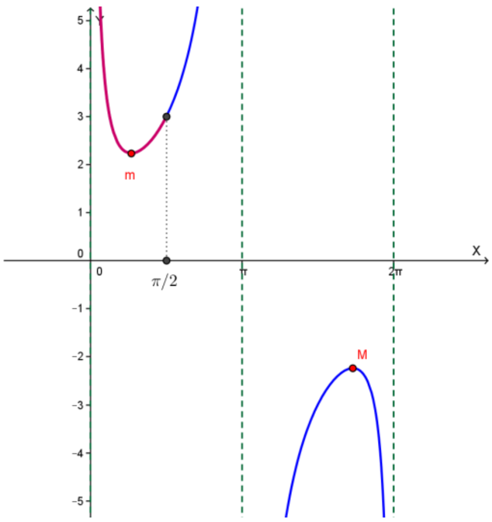
Derivata seconda:

$$f''(x)=\frac{3\sin^3(x)-(2-3cosx)\,2\sin(x)\cos(x)}{\sin^4(x)}\geq 0\ \ se$$

$\sin(x)(3\sin^2(x)-4\cos(x)+6\cos^2(x))\geq 0\,,\quad \sin(x)\,(3\cos^2(x)-4\cos(x)+3)\geq 0$

Notiamo che il delta di $3\cos^2(x)-4\cos(x)+3$ è negativo, quindi il fattore è sempre positivo; pertanto la derivata seconda (nel dominio) è positiva quando $\sin(x)>0$, quindi la concavità è verso l'alto se $0<x<\pi$ e verso il basso se $\pi<x<2\pi$. Non ci sono flessi.

Grafico della funzione (è evidenziato il tratto che rispetta i limiti geometrici):



3)

Si verifichi che $G(x) = ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$ *è una funzione primitiva di* $g(x) = \frac{1}{\sin x}$.

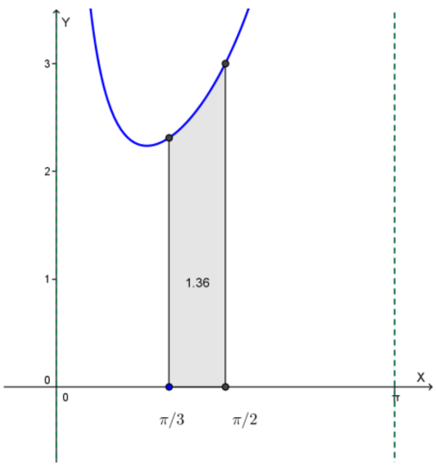
E' sufficiente verificare che $G'(x) = g(x)$. Risulta:

$$G'(x) = \frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}}{\tan\frac{x}{2}} = \frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)}{2\cdot\tan\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin(x)} = g(x)$$

(in base alle formule parametriche che esprimono il seno di un angolo in funzione della tangente dell'angolo metà).

4)

Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ*, dall'asse x e dalle rette di equazione* $x = \frac{\pi}{3}$ *e* $x = \frac{\pi}{2}$.



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3-2\cos x}{\sin x}\right)dx = 3\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin x}\right)dx - 2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)dx = 3\left[ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$-2[\ln|\sin x]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 3\left[ln\left|\tan\frac{\pi}{4}\right| - ln\left|\tan\frac{\pi}{6}\right|\right] - 2\left[0 - ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = 3\left[0 - ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right] + 2ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -3\,ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 2ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3ln\sqrt{3} + 3ln3 + 2ln\sqrt{3} - 2ln2 = 3ln3 - ln\sqrt{3} - 2ln2 =$$

$$= 3ln3 - \frac{1}{2}ln3 - 2ln2 = \left(\frac{5}{2}ln3 - 2ln2\right)u^2 \cong 1.36\,u^2 = Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria