PNI 2010 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 2

Si consideri la funzione: $f(x) = ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

1)

Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

$$f(x) = ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

Dominio:

$x + \sqrt{1+x^2} > 0\,;\quad \sqrt{1+x^2} > -x\,;$

$$\begin{cases} -x < 0 \\ 1+x^2 \geq 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} -x \geq 0 \\ 1+x^2 > x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \forall x \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ 1 > 0 \end{cases}$$

$(x > 0 \quad \cup \quad x \leq 0) \quad \Rightarrow \quad -\infty < x < +\infty$

Intersezioni con gli assi:

x=0 , y=0. Se y=0, $ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = 0,\;\; cio\grave{e}\;\;\; x + \sqrt{1+x^2} = 1;$

$$\sqrt{1+x^2} = 1 - x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 1 + x^2 = 1 - 2x + x^2 \end{cases} \;\; ; \;\; \begin{cases} x \leq 1 \\ x = 0 \end{cases} \;:\;\; x = 0$$

La curva interseca gli assi cartesiani solo nell’origine.

Positività:

La funzione è positiva se $ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) > 0\,,\; x + \sqrt{1+x^2} > 1\,,\; \sqrt{1+x^2} > 1 - x\,,$

$$\begin{cases} 1 - x < 0 \\ 1+x^2 \geq 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 1 + x^2 > 1 - 2x + x^2 \end{cases}$$

$\begin{cases} x > 1 \\ \forall x \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x \leq 1 \\ x > 0 \end{cases} \;\; ; \quad x > 1 \quad vel \quad 0 < x \leq 1$ ossia x>0

Limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

Calcoliamo il limite $\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1-x^2}{x-\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x-\sqrt{1+x^2}}=0^+$
Quindi:

$$\lim_{x\to-\infty} ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=+\infty$$

Asintoti:

Dobbiamo vedere se ci sono asintoti obliqui. Siccome la funzione sia per $x\to-\infty$ sia $x\to+\infty$ non è un infinito del primo ordine la funzione non ammette asintoti obliqui.

Derivata prima:

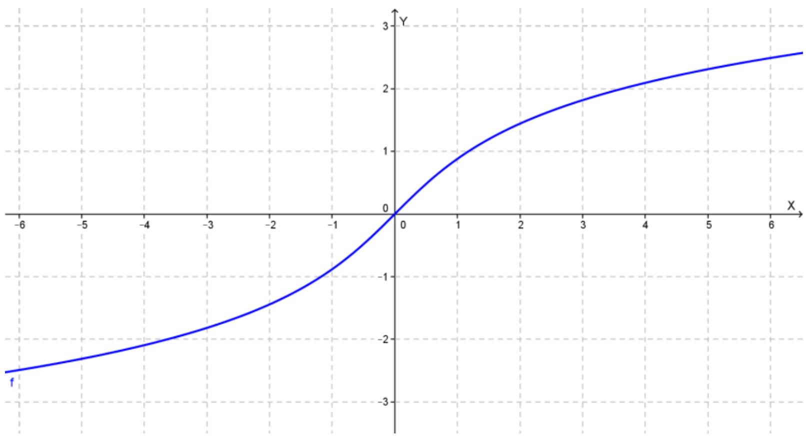
$$f'(x)=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0\quad per\ ogni\ x$$

La funzione è sempre crescente; non ha massimi né minimi.

Derivata seconda:

$f''(x)=-\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\geq 0\ \ se\ \ x\leq 0$: quindi il grafico volge la concavità verso l'alto se x<0 e verso il basso se x>0; x=0 è punto di flesso, con ordinata y=0.

Grafico della funzione:



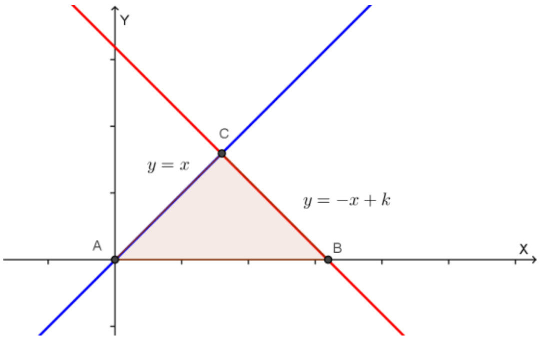
2)

Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di flesso e l'equazione della perpendicolare alla suddetta tangente, che determina con essa e con la direzione positiva dell'asse x un triangolo avente area 4.

Il coefficiente angolare della tangente inflessionale è $f'(0) = 1$;la tangente inflessionale ha quindi equazione:

$y - 0 = 1(x - 0),\ \ y = x.$

La perpendicolare alla tangente inflessionale è del tipo: $y = -x + k\ \ (con\ k > 0)$



Il triangolo richiesto ABC ha in generale area:

$$Area(ABC) = \frac{1}{2} \cdot x_B \cdot y_C$$

Ascissa di B: $\begin{cases} y = 0 \\ y = -x + k \end{cases},\quad x = k$

Ordinata di C: $\begin{cases} y = x \\ y = -x + k \end{cases},\quad y = \frac{k}{2}$

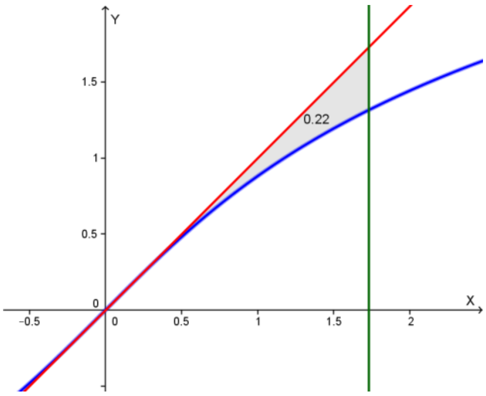
$$Area(ABC) = \frac{1}{2} \cdot x_B \cdot y_C = \frac{1}{2} k \left(\frac{k}{2}\right) = \frac{1}{4} k^2 = 4 \quad se \quad k = 4\,.$$

La retta richiesta ha equazione: $y = -x + 4$.

3)

Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ, dalla tangente inflessionale e dalla retta di equazione $x = \sqrt{3}$.

Rappresentiamo la regione in oggetto:



L'area richiesta si ottiene con il seguente calcolo integrale: $\int_0^{\sqrt{3}} \left(x - ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right) dx$
Cerchiamo una primitiva di $ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ integrando per parti.

$$\int ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) dx = \int (x)' \cdot ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) dx = x\, ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$
$$= x\, ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + C$$
$$\int_0^{\sqrt{3}} \left(x - ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\, ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + \sqrt{1+x^2}\right]_0^{\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{3}{2} - \sqrt{3}\, ln\left(\sqrt{3}+2\right) + 2 - (0 - 0 + 1) = \left(\frac{5}{2} - \sqrt{3}\, ln\left(\sqrt{3}+2\right)\right) u^2 \cong 0.22\, u^2 = Area$$

4)

Dopo aver verificato che sono soddisfatte le condizioni di invertibilità, si ricavi l'espressione analitica della funzione inversa $x = g\,(y)$ della funzione data.

La funzione data è strettamente crescente, quindi è invertibile. Risulta:

$$y = ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right), \qquad e^y = x + \sqrt{1+x^2}\ , \ \ e^y - x = \sqrt{1+x^2}\ ,$$

Possiamo elevare al quadrato ponendo $e^y - x \geq 0,\ e^y \geq x,\ y \geq lnx$ che è verificato, essendo $ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \geq \ln(x)$.

$$e^{2y} - 2x\, e^y + x^2 = 1 + x^2\ \ ,\ \ -2x\, e^y = 1 - e^{2y}\ \ ,\ \ x = \frac{e^{2y}-1}{2e^y} = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = Sh(y).$$

La funzione inversa della funzione data è il seno iperbolico di y.

Con la collaborazione di Angela Santamaria