ESAME DI STATO LICEO SCIENTIFICO 2010

Indirizzo: P.N.I. + scientifico autonomia + scientifico Brocca + Proteo.

CORSO SPERIMENTALE

Sessione straordinaria 2010

Tema di Matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sono dati: una semicirconferenza di centro O e diametro $AB = 2$ e la tangente *t* parallela al diametro. Si prolungano i raggi OA ed OB di due segmenti uguali AP e BQ e dai punti P e Q si conducono le tangenti alla semicirconferenza, che intersecano la retta *t* rispettivamente nei punti M ed N.

1. Si provi che l'area $S(x)$della superficie del solido generato in una rotazione completa del trapezio PQNM attorno alla retta PQ, è data da:

$$S(x) = 2\pi \cdot \frac{3 - 2\cos x}{senx}.$$

2. Si studi la funzione $f(x) = S(x)/2\pi$ e se ne tracci il grafico γ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$, mettendo in evidenza la parte di grafico compatibile con i dati del problema.

3. Si verifichi che $G(x) = \log\left|tg\frac{x}{2}\right|$ è una funzione primitiva di $g(x) = \frac{1}{senx}$.

4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette di equazione $x = \frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

2. Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di flesso e l'equazione della perpendicolare alla suddetta tangente, che determina con essa e con la direzione positiva dell'asse x un triangolo avente area 4.

3. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ, dalla tangente inflessionale e dalla retta di equazione $x = \sqrt{3}$.

4. Dopo aver verificato che sono soddisfatte le condizioni di invertibilità, si ricavi l'espressione analitica della funzione inversa $x = g(y)$ della funzione data.

QUESTIONARIO

1. Due osservatori si trovano ai lati opposti di un grattacielo, a livello del suolo. La cima dell'edificio dista 1600 metri dal primo osservatore, che la vede con un angolo di elevazione di 15°. Se il secondo individuo si trova a 650 metri dalla cima del grattacielo, quale è la distanza tra i due osservatori?

2. Si calcoli il limite della funzione $(1 + tgx)^{ctgx}$ quando x tende a 0.

3. In quanti modi 10 persone possono disporsi su dieci sedili allineati? E attorno ad un tavolo circolare?

4. Si dimostri che ogni funzione $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, dove a, b, c, d sono valori reali con

   $a \neq 0$, ha un massimo e un minimo relativi oppure non ha estremanti.

5. Si calcoli il volume del solido generato da una rotazione completa attorno all'asse x del triangolo di vertici A(2, 2) , B(6, 4) , C(6, 6)

6. I vertici di un triangolo sono: O(0,0) , A(0,2) , B(1,1). Si trovi l'equazione della circonferenza γ inscritta nel triangolo OAB e quella della circonferenza γ' ad esso circoscritta.

7. Si verifichi che la cubica di equazione $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 7$ è simmetrica rispetto al suo punto di flesso.

8. Si dimostri che l'equazione $\frac{1}{x} - e^x = 0$ ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

9. Una rappresentanza di cinque persone deve essere scelta a caso tra dieci uomini e tre donne. Qual è la probabilità che il comitato sia costituito da tre uomini e due donne?

10. Sia data l'ellisse di equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e il rombo in essa inscritto, con i vertici coincidenti con quelli dell'ellisse. Si scelga a caso un punto all'interno dell'ellisse: si determini la probabilità che tale punto risulti esterno al rombo.

Durata massima della prova: 6 ore.
E' consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.