

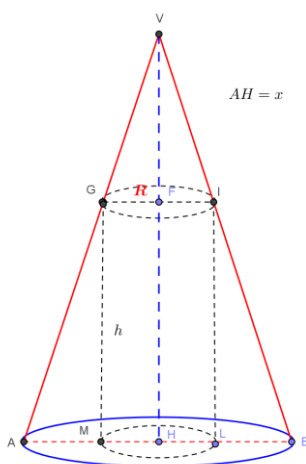
LICEO SCIENTIFICO 2011 – CALENDARIO AUSTRALE - QUESTIONARIO

Q1

Si determini il cono di volume minimo circoscritto ad un cilindro dato.

Siano R ed h il raggio e l'altezza del cilindro dato. Indichiamo con x il raggio di base del cono ($x > R$).
 Detti AH e VH il raggio e l'altezza del cono risulta:

$$V(\text{cono}) = \frac{1}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot VH = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot VH$$



Troviamo VH in funzione di x osservando che i triangoli AHV e AMG sono simili:

$$AH:AM = VH:GM, \quad x:(x-R) = VH:h, \quad VH = \frac{hx}{x-R}$$

Quindi:

$$V(\text{cono}) = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot VH = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot \frac{hx}{x-R} = \frac{1}{3}\pi h \cdot \frac{x^3}{x-R}$$

Tale volume è massimo se lo è:

$$y = \frac{x^3}{x-R}, \quad \text{con } x > R$$

Utilizziamo il metodo delle derivate:

$$y' = \frac{3x^2(x-R) - x^3(1)}{(x-R)^2} = \frac{2x^3 - 3Rx^2}{(x-R)^2} \geq 0 \text{ se } x^2(2x - 3R) \geq 0, \quad x \geq \frac{3}{2}R$$

La funzione è crescente se $x > \frac{3}{2}R$ e decrescente se $R < x < \frac{3}{2}R$: essa è quindi minima

$$\text{se } x = \frac{3}{2}R; \text{ risulta: } VH = \frac{hx}{x-R} = VH = \frac{\frac{3}{2}Rh}{\frac{3}{2}R - R} = 3h.$$

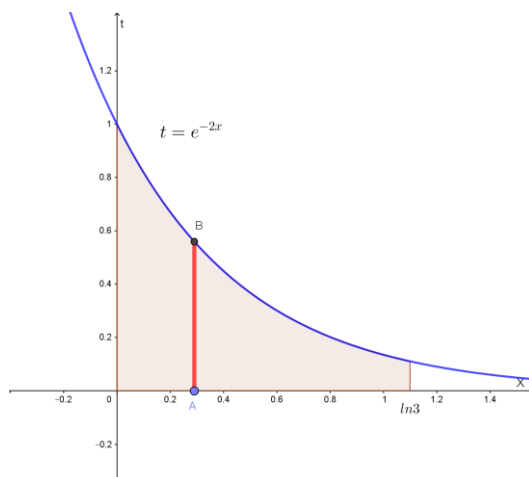
Il cono di volume minimo circoscritto ad un cilindro dato è quindi quello che ha come raggio di base $\frac{3}{2}$ del raggio del cilindro dato e altezza tripla dell'altezza del cilindro dato.

Q2

Si consideri la regione R del primo quadrante del sistema di riferimento Oxy, delimitata dal grafico di $t = e^{-2x}$, dall'asse x e dalla retta $x = \ln 3$. R è la base di un solido W che, tagliato con piani perpendicolari all'asse x, dà tutte sezioni quadrate. Si calcoli il volume di W.

La funzione richiesta si ottiene dalla funzione $y = e^x$ mediante una dilatazione orizzontale di fattore 2 (e^{2x}) ed una simmetria rispetto all'asse y (e^{-2x}).

Rappresentiamo la funzione $t = e^{-2x}$ e la regione R:



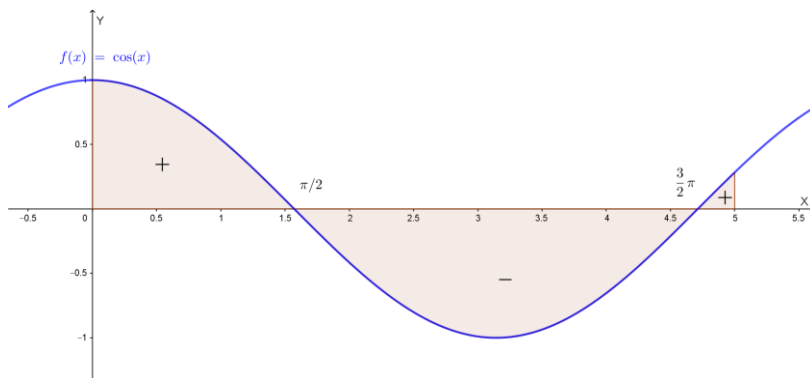
Detta $A(x)$ l'area della sezione quadrata si ha: $A(x) = AB^2 = t^2 = e^{-4x}$; quindi:

$$\begin{aligned} V(W) &= \int_0^{\ln 3} e^{-4x} dx = -\frac{1}{4} \int_0^{\ln 3} -4 e^{-4x} dx = -\frac{1}{4} [e^{-4x}]_0^{\ln 3} = -\frac{1}{4} (e^{-4 \ln 3} - 1) = \\ &= -\frac{1}{4} [(e^{\ln 3})^{-4} - 1] = -\frac{1}{4} (3^{-4} - 1) = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{81} - 1 \right) = -\frac{1}{4} \left(-\frac{80}{81} \right) = \frac{20}{81} u^3 = V(W) \end{aligned}$$

Q3

Si calcoli l'area della regione delimitata dalla curva $y = \cos x$ e dall'asse x da $x = 0$ a $x = 5$ e con l'aiuto di una calcolatrice se ne dia il valore arrotondato con tre cifre decimali.

Rappresentiamo la regione richiesta.



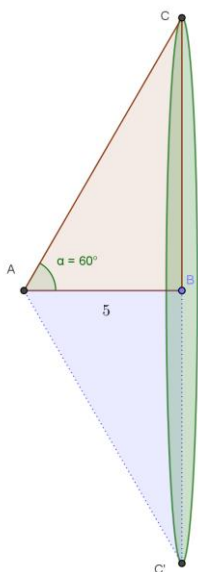
L'area richiesta è data da:

$$Area = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos x \, dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^5 \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} + [\sin x]_{\frac{3}{2}\pi}^5 =$$

$$= (1 - 0) - (-1 - 1) + (\sin 5 + 1) = 4 + \sin 5 \cong 3.041 \, u^2 = Area$$

Q4

Sia AB un segmento di lunghezza 5 dm. Si determini il luogo dei punti C dello spazio tali che \widehat{ABC} sia retto e \widehat{BAC} misuri 60° .



Risulta: $BC = AB \cdot \tan(60^\circ) = 5\sqrt{3}$.

C descrive la circonferenza di centro B e raggio BC nel piano passante per B e perpendicolare al segmento AB, come dire che C descrive la circonferenza di base del cono circolare retto con altezza AB e raggio di base BC.

Q5

Una sfera è inscritta in un cubo; quale è il rapporto fra il volume della sfera e quello del cubo?

Se una sfera è inscritta in un cubo allora il suo diametro è uguale allo spigolo del cubo. Quindi se indichiamo con R il raggio della sfera, lo spigolo del cubo è $2R$. Si ha:

$V(sfera) = \frac{4}{3}\pi R^3$, $V(cubo) = (2R)^3 = 8R^3$. Quindi:

$$\frac{V(sfera)}{V(cubo)} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{8R^3} = \frac{\pi}{6}$$

Q6

Si risolva l'equazione

$$\binom{x}{2} + 4 = \binom{x+1}{2}$$

Condizioni:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ x \geq 2 \\ x+1 \geq 2 \end{cases} : x \geq 2 \text{ con } x \in \mathbb{N}$$

Sviluppando i coefficienti binomiali si ha:

$$\frac{x(x-1)}{2!} + 4 = \frac{(x+1)x}{2!}, \quad x^2 - x + 8 = x^2 + x, \quad 2x = 8: \quad x = 4.$$

Q7

Si dica se

$$f(x) = \sin(x - \pi) + \cos(3x)$$

è una funzione periodica ed in caso affermativo se ne determini il periodo.

Ricordiamo che la somma di due funzioni periodiche con periodi a rapporto razionale è una funzione periodica con periodo uguale al minimo comune multiplo dei due periodi.

La funzione data è somma di due funzioni periodiche di periodo rispettivamente:

$$T_1 = 2\pi \text{ e } T_2 = \frac{2\pi}{3}, \quad \text{con } \frac{T_1}{T_2} = 3.$$

La funzione f è quindi periodica di periodo $T = m.c.m.(T_1, T_2) = m.c.m.\left(\frac{6}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{6}{3}\pi = 2\pi$.

La funzione f è periodica ed ha periodo $T = 2\pi$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria