Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Siano dati un segmento $|\overline{AB}| = 1$ ed una circonferenza con il centro O sulla perpendicolare in A ad $\overline{AB}$ e il diametro $|\overline{AC}| = 2x$.

a) Posto $y = \tan O\hat{B}C$, si esprima y in funzione di x, mostrando che risulta:

$$y = \frac{x}{1+2x^2}, \quad \text{con} \quad x \geq 0.$$

b) Si studi la funzione $y = f(x)$ e se ne tracci il grafico Γ.

c) Si scrivano le equazioni delle tangenti a Γ nei punti di flesso e si calcoli l'area del triangolo che esse formano con l'asse x.

d) Si determini l'area della regione di piano limitata da Γ, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = \sqrt{6}$.

Problema 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = e^x(x^2 - 4x + 3).$$

a) Si studi tale funzione e se ne disegni il grafico Λ su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

b) Si scriva l'equazione della tangente alla curva Λ nel punto di intersezione con l'asse y e si calcoli il raggio del cerchio inscritto nel triangolo che essa forma con gli assi cartesiani.

c) Si scriva l'equazione della circonferenza circoscritta al suddetto triangolo.

d) Si calcoli l'area della superficie piana, situata nel IV quadrante, delimitata dalla curva Λ e dall'asse x.

Questionario

1. Una fotografa naturalista individua un uccello raro appollaiato su un albero. L'angolo di elevazione è di 14° e il telemetro dell'apparecchio fotografico indica che tra l'uccello e l'obiettivo vi è una distanza di 103 metri. Ella avanza lentamente, sino ad arrivare in un punto per cui l'angolo di elevazione è di 20°. A che distanza si trova ora l'uccello dall'obiettivo della fotografa?

2. Si calcoli il limite della funzione

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}$$

quando x tende a 0^+.

3. Si provi che fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio r, quello di minima area laterale ha il vertice che dista $r\sqrt{2}$ dalla superficie sferica.

4. Si dimostri che il grafico di una qualsiasi funzione polinomiale di terzo grado ha esattamente un flesso.

5. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva

$$y = \sqrt{\frac{x}{1+x}},$$

dall'asse x e dalle rette $x = 1$, $x = 3$.

6. Sia data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x/(x-1)}, & \text{se } x \neq 1; \\ 0, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Si dica se essa è continua nel punto $x = 1$.

7. Si determini il campo di esistenza della funzione

$$y = \arcsin \log(2 - x).$$

8. Si consideri la seguente proposizione: "La relazione di perpendicolarità fra rette nel piano è riflessiva, simmetrica e transitiva". Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

9. Si calcoli il valore medio della funzione:

$$y = \sqrt{\sin x} \cdot \cos x\,,$$

nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi/2$.

10. Si dimostri che una corona circolare ha la stessa area del cerchio che ha per diametro una corda del cerchio maggiore la quale sia tangente al cerchio minore.