



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Un trapezio isoscele è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio 1, in modo che la base maggiore contenga il diametro.

1. Si calcoli, in funzione dell'ampiezza x del suo angolo acuto, il volume del solido generato dal trapezio in una rotazione di 180° intorno alla congiungente dei punti medi delle basi, controllando che risulta:

$$V(x) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\cos^2 x - 3 \cos x + 3}{\sin^2 x}$$

2. Si studi la funzione $f(x) = 3V(x)/\pi$ e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 < x < 2\pi$, mettendo in evidenza la parte di grafico compatibile con i dati del problema.
3. Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di ascissa $x = \pi/2$ e si calcoli l'area del triangolo che essa determina con l'asse x e con la retta di equazione $x = \pi$.
4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ , dall'asse x e dalle rette di equazione $x = \pi/4$ e $x = \pi/2$.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = x\sqrt{2-x}$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy .
2. Si risolva la disequazione:

$$x\sqrt{2-x} < 1$$

3. Si scriva l'equazione della tangente alla curva γ nel punto di intersezione con l'asse y e si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza dell'angolo φ che essa forma con la direzione positiva dell'asse x .
4. La regione finita di piano delimitata dalla curva γ e dall'asse x nel I quadrante è la base di un solido S , le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x , sono tutte esagoni regolari. Si calcoli il volume di S .



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si divida il segmento $AB = a$ in due parti AC e CB , in modo che, costruito su AC il quadrato $ACDE$ e su CB il triangolo equilatero CBF , sia minima l'area del pentagono $ABFDE$.
2. Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \log(\operatorname{sen} 2x), & \text{per } 0 < x < \pi/2, \\ 0 & , \text{ per } x = 0, \end{cases}$$

si provi che è continua, ma non derivabile, nel punto $x = 0$.

3. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = (x + 2)^{\log(e+2x)}$$

nel punto $P(0, 2)$.

4. La superficie piana S , delimitata dalla curva γ di equazione $y = 1 + tgx$ e dall'asse x nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi/4$, è la base di un solido Σ , le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x , sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di Σ .
5. Mentre corre con una velocità costante attraverso il deserto, montando il suo fido cammello, un capo tuareg vede la cima di una grande palma e dirige direttamente verso di essa. Al primo avvistamento la cima della palma si presentava con un angolo di elevazione di 4° ; venti minuti più tardi l'angolo di elevazione misura 9° . Quanti minuti sono ancora necessari al tuareg per raggiungere l'albero?
6. Si determinino le equazioni degli asintoti della curva:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} - x$$

7. Un ottaedro regolare di alluminio (densità $\rho = 2,7 \text{ g/cm}^3$), avente lo spigolo $l = 5 \text{ cm}$, presenta all'interno una cavità di forma cubica. Sapendo che la massa dell'ottaedro è $m = 155 \text{ g}$, si calcoli la lunghezza dello spigolo della cavità.
8. Quante diagonali ha un poligono convesso di n lati?
9. Si calcoli il valore medio della funzione:

$$y = \frac{1}{x^2}$$

nell'intervallo $a \leq x \leq b$, con $0 < a < b$, e si dimostri che esso è uguale alla media geometrica tra i due valori che la funzione assume nei due estremi dell'intervallo.

10. Data la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 4}{x - 1}$$

si verifichi che esiste un solo punto ξ interno all'intervallo chiuso $[-1, 0]$, tale che la tangente al diagramma in questo punto è parallela alla corda congiungente i due punti estremi del diagramma.