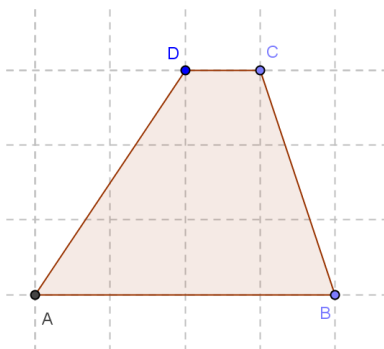


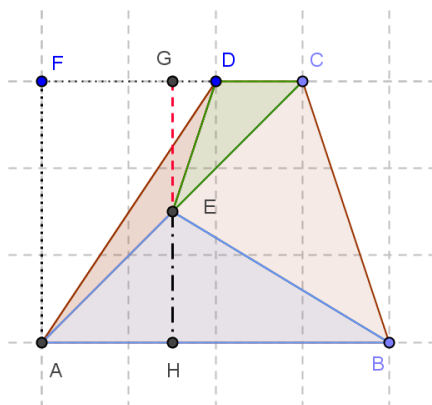
ORDINAMENTO 2013 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

Del trapezio $ABCD$ si hanno le seguenti informazioni: la base maggiore AB e la base minore DC misurano rispettivamente 4 m e 1 m , l'altezza del trapezio misura 3 m e la tangente dell'angolo $\hat{B}AD$ è uguale a $\frac{3}{2}$.



1)

Si calcolino le aree dei quattro triangoli in cui il trapezio è diviso da una sua diagonale e dai segmenti che uniscono il punto medio di questa con gli estremi dell'altra diagonale.



Sia E il punto medio della diagonale AC . Tracciando il segmento GH passante per E e perpendicolare alle due basi del trapezio, risulta: $GH = 3$, quindi $GE = EH = \frac{3}{2}$.

Quindi:

$$\text{Area}(ABE) = \frac{4 \cdot \frac{3}{2}}{2} = 3\text{ m}^2$$

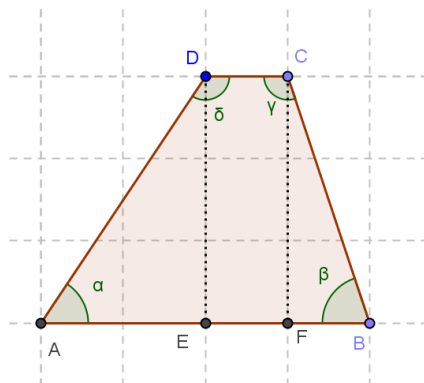
$$\text{Area}(CDE) = \frac{1 \cdot \frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}\text{ m}^2$$

$$\text{Area}(ADE) = \text{Area}(ACD) - \text{Area}(CDE) = \frac{CD \cdot AF}{2} - \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\text{ m}^2$$

$$\text{Area}(BCE) = \text{Area}(ABCD) - \text{Area}(ABE) - \text{Area}(ACD) = \frac{(4+1) \cdot 3}{2} - 3 - \frac{3}{2} = 3\text{ m}^2$$

2)

Si determinino, con l'aiuto di una calcolatrice, le misure, in gradi e primi sessagesimali, degli angoli del trapezio.

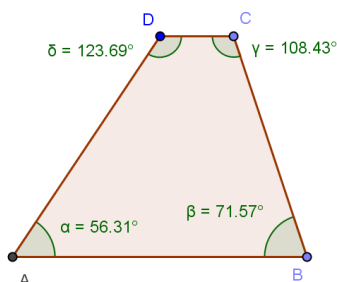


Risulta: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{3}{2} \right) \cong 56.31^\circ = 56^\circ 19'$

Quindi $\delta = 180^\circ - \alpha \cong 123.69^\circ = 123^\circ 41'$

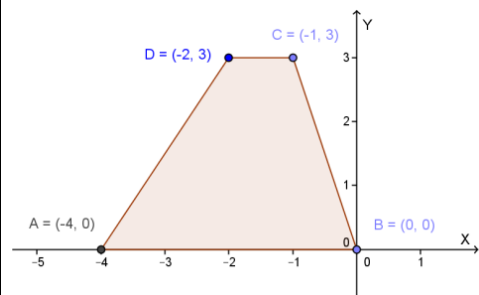
Risulta poi: $\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{1} \Rightarrow \beta = \operatorname{arctg}(3) \cong 71.57^\circ = 71^\circ 34'$

Quindi $\gamma = 180^\circ - 71.57^\circ = 108^\circ 26'$



3)

Riferito il piano del trapezio ad un conveniente sistema di assi cartesiani, si trovi l'equazione della parabola Γ avente l'asse perpendicolare alle basi del trapezio e passante per i punti B, C, D.



Fissiamo il sistema di riferimento in modo che B sia l'origine, l'asse x coincida con la retta AB e l'asse y sia rivolto verso l'alto.

In tale sistema i vertici del trapezio avranno le seguenti coordinate:

$$A = (-4; 0), \quad B = (0; 0), \quad C = (-1; 3), \quad D = (-2; 3).$$

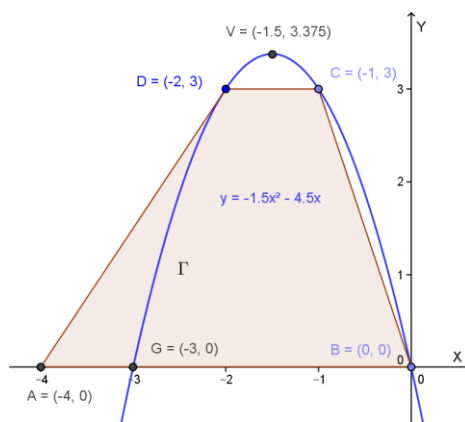
La parabola Γ deve avere l'asse perpendicolare alle basi del trapezio e passare per i punti B, C, D: $B = (0; 0), \quad C = (-1; 3), \quad D = (-2; 3)$.

Γ ha equazione del tipo: $y = ax^2 + bx + c$; imponiamo il passaggio per B, C e D:

$$\begin{cases} 0 = c \\ 3 = a - b + c \\ 3 = 4a - 2b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 3 = a - b \\ 3 = 4a - 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = b + 3 \\ 3 = 4b + 12 - 2b \Rightarrow b = -\frac{9}{2} \end{cases}$$

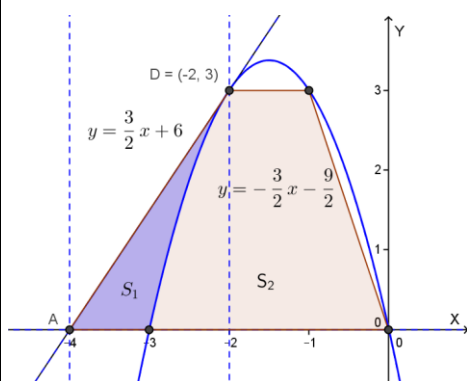
$$\begin{cases} c = 0 \\ a = -\frac{9}{2} + 3 \\ b = -\frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -\frac{3}{2} \\ b = -\frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x = -\frac{3}{2}x(x+3)$$

La parabola ha vertice in $V = \left(-\frac{3}{2}; \frac{27}{8}\right)$.



4)

Si determinino le aree delle due regioni in cui il trapezoido è diviso da Γ .



Dobbiamo calcolare le aree delle due regioni S_1 ed S_2 .

La retta AD ha equazione $y = \frac{3}{2}x + 6$.

$$\begin{aligned} Area(S_1) &= \int_{-4}^{-2} \left[\frac{3}{2}x + 6 \right] dx - \int_{-3}^{-2} \left(-\frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x \right) dx = \\ &= \left[\frac{3}{4}x^2 + 6x \right]_{-4}^{-2} - \left[-\frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 \right]_{-3}^{-2} = [3 - 12 - \\ &- (12 - 24)] - \left[4 - 9 - \left(\frac{27}{2} - \frac{81}{4} \right) \right] = \frac{5}{4} u^2 \end{aligned}$$

$$Area(S_2) = Area(\text{trapezoido}) - Area(S_1) = \frac{15}{2} - \frac{5}{4} = \frac{25}{4} u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri