

LICEO DELLA COMUNICAZIONE 2014 - PROBLEMA 1

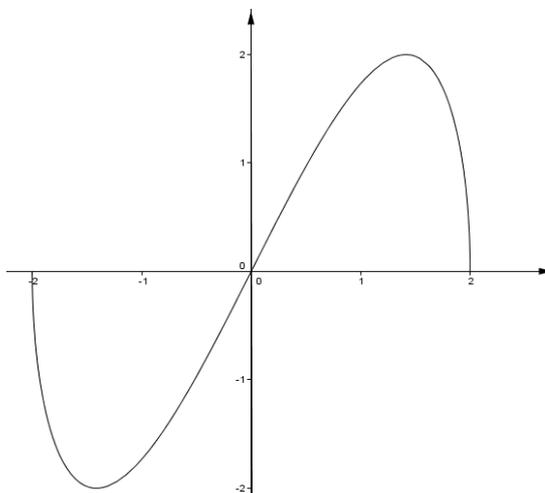
1)

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$

Anche se non richiesto esplicitamente, facciamo lo studio completo della funzione.

Dominio: $4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$

Simmetrie notevoli: $f(-x) = -f(x)$, quindi la funzione è dispari (grafico simmetrico rispetto all'origine).



Intersezioni con gli assi cartesiani:

$$x=0, y=0$$

$$y=0, x=0, x=2, x=-2$$

Segno della funzione: $f(x) \geq 0$ se $x \geq 0$ (nel dominio).

Limiti: la funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato.

Derivata prima:

$$\frac{d}{dx}(x\sqrt{4-x^2}) = -\frac{2(x^2-2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

La funzione non è derivabile in $x = -2$ ed in $x = 2$.

Il limite per x che tende a $(-2)^+$ oppure a 2^- della derivata è $-\infty$, quindi avremo tangenti verticali in $x = -2$ ed in $x = 2$

$$f'(x) \geq 0 \text{ se } x^2 - 2 \leq 0 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

Quindi la funzione è crescente in tale intervallo e decrescente negli intervalli

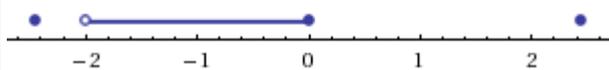
$$-2 \leq x < -\sqrt{2} \quad \text{e} \quad \sqrt{2} < x \leq 2$$

Avremo quindi un **minimo** (assoluto) in $m = (-\sqrt{2}; -2)$ ed un **massimo** (assoluto) nel punto $M = (\sqrt{2}; 2)$

Derivata seconda:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(x \sqrt{4-x^2} \right) = \frac{2x(x^2-6)}{(4-x^2)^{3/2}}$$

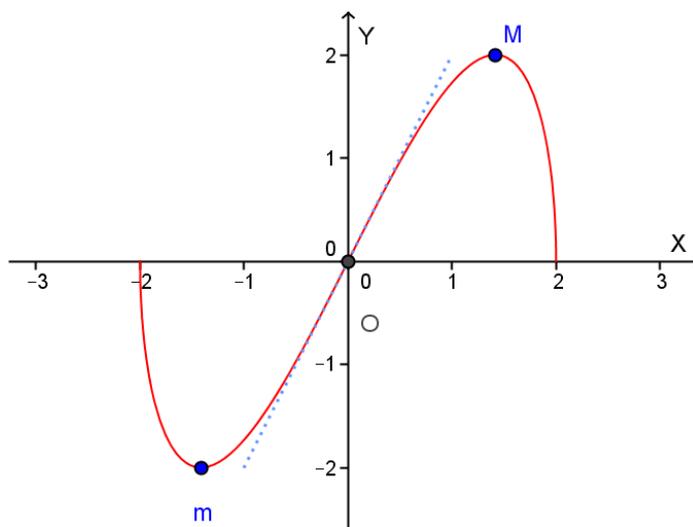
$$f''(x) \geq 0 \text{ se } 2x(x^2-6) \geq 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6} \text{ (fuori dominio), } -2 < x \leq 0$$



Quindi il grafico ha la concavità verso l'alto nell'intervallo $-2 < x \leq 0$, verso il basso nella parte rimanente del dominio. **Flesso nel punto (0;0) con tangente inflessionale di**

coefficiente angolare $f'(0)=2$

Il grafico della funzione è pertanto il seguente:



2)

Come detto nel punto 1) **la funzione è dispari**, quindi il suo grafico Γ è simmetrico rispetto all'origine.

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \left(x \sqrt{4-x^2} \right) = -\frac{2(x^2-2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

$f'(0)=2$, quindi, detto α l'angolo formato dalla tangente nell'origine con la direzione positiva dell'asse x, risulta:

$$\operatorname{tg} \alpha = 2, \text{ da cui } \alpha = \operatorname{arctg}(2) \cong 63^\circ 26'$$

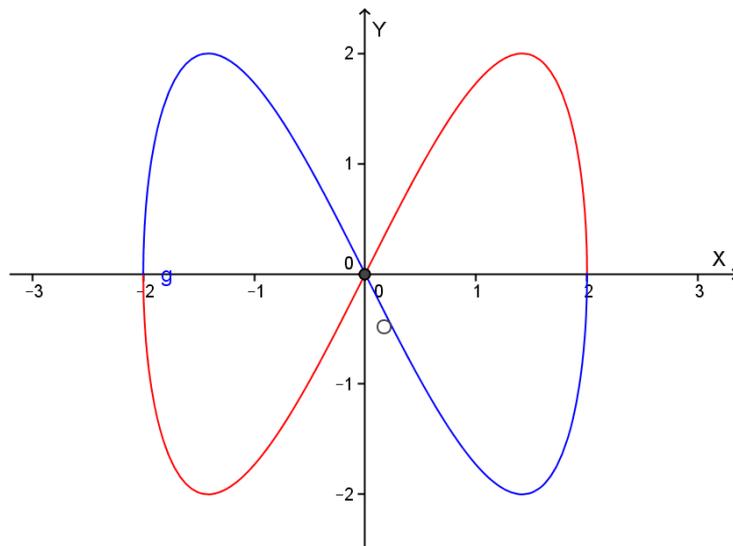
3)

Consideriamo la curva di equazione $y^2 = x^2(4 - x^2)$

Posto $4 - x^2 \geq 0$, cioè $-2 \leq x \leq 2$, otteniamo:

$$y = \pm|x|\sqrt{4 - x^2} = \begin{cases} \pm x\sqrt{4 - x^2} & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ \mp x\sqrt{4 - x^2} & \text{se } -2 \leq x < 0 \end{cases}$$

Il grafico è quindi quello della $f(x)$ unito al grafico di $-f(x)$



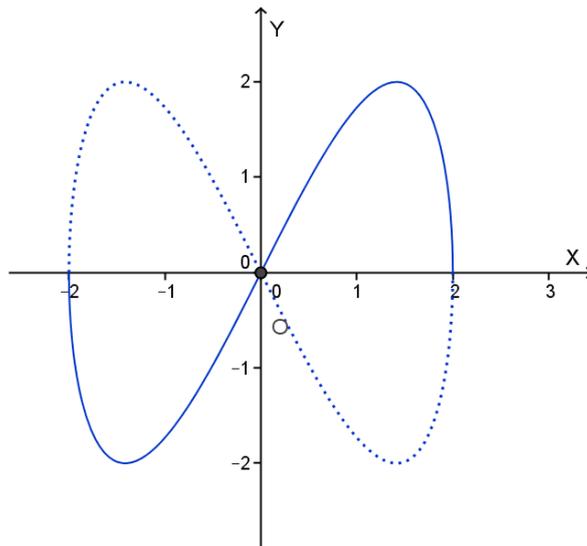
L'area richiesta è data da:

$$\begin{aligned} \text{Area} &= 4 \cdot \int_0^2 f(x) dx = 4 \cdot \int_0^2 x\sqrt{4 - x^2} dx = -2 \cdot \int_0^2 -2x\sqrt{4 - x^2} dx = -2 \cdot \left[\frac{2}{3} (4 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \\ &= -\frac{4}{3} (0 - 8) = \frac{32}{3} u^2 \cong 10.67 u^2 \end{aligned}$$

4)

Si consideri il solido W che la regione delimitata da Γ e dall'asse x genera nella rotazione attorno all'asse x . Si calcoli il volume di W .

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$



Il volume di W si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$V(W) = 2 \left(\pi \int_0^2 f^2(x) dx \right) =$$

$$= 2\pi \int_0^2 x^2(4-x^2) dx = 2\pi \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx =$$

$$= 2\pi \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^2 = 2\pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right) = \frac{128}{15}\pi \cong 26.808 u^3$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri