ORDINAMENTO 2014 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x\, ln^2 x}$$

1)

Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

Dominio: x$\neq 0,\ x > 0,\ \ln x \cong 0 \ \ \Longrightarrow \ \ x \neq 1$:

$0 < x < 1,\ \ 1 < x < +\infty$

Simmetrie notevoli: no (dominio non simmetrico).

Intersezioni con gli assi cartesiani: nessuna intersezione con glia assi.

Segno della funzione: $\frac{1}{x\, ln^2 x} > 0 \ \Longrightarrow x > 0\ con\ \ x \neq 1$

Limiti:

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x\, ln^2 x} = +\infty$ (x=0 asintoto verticale; **N.B.** $\lim_{x\to 0^+} x\, ln^2 x = 0^+$)

$\lim_{x\to(1)^\pm} \frac{1}{x\, ln^2 x} = +\infty$ ($x = 1$ asintoto verticale)

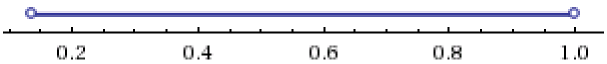
$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\, ln^2 x} = 0^+$ ($y = 0$ asintoto orizzontale; non c'è asintoto obliquo)

Derivata prima:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x\log^2(x)}\right) = -\frac{\log(x)+2}{x^2\log^3(x)}$$

$f'(x) > 0 \ -\frac{\ln x + 2}{x^2\, ln^3 x} > 0 \ \Longrightarrow \ \frac{\ln x + 2}{\ln x} < 0$

$\frac{1}{e^2} < x < 1$



Quindi la funzione è **crescente** per $\frac{1}{e^2} < x < 1$

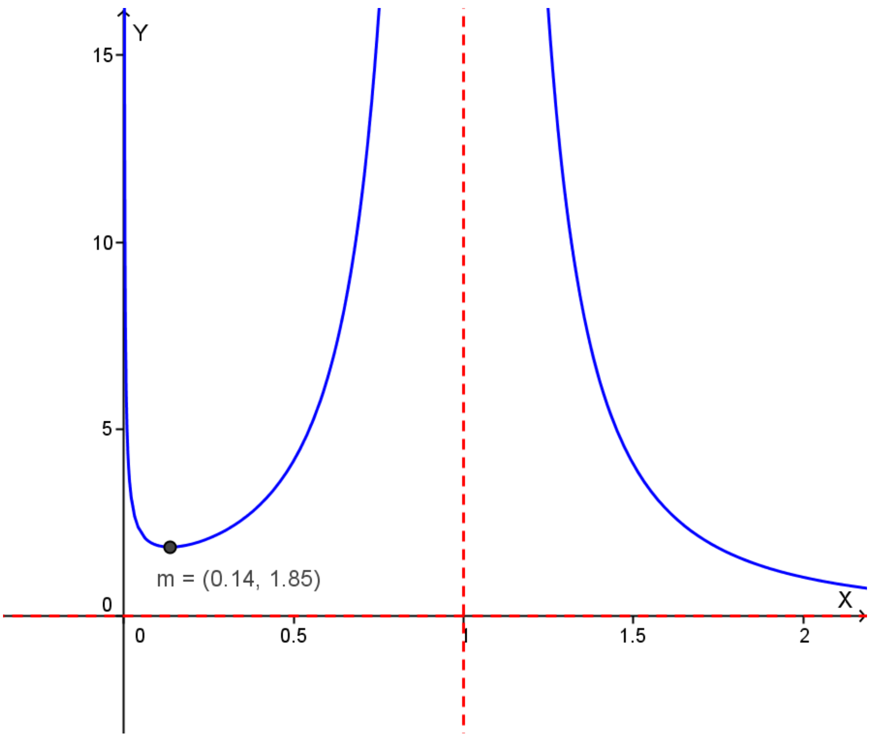
Abbiamo un minimo relativo nel punto $m = \left(\frac{1}{e^2}; \frac{e^2}{4}\right)$

Derivata seconda:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{x \log^2(x)}\right) = \frac{2\left(\log^2(x) + 3\log(x) + 3\right)}{x^3 \log^4(x)}$$

La derivata seconda risulta sempre positiva, quindi la concavità è sempre rivolta verso l'alto.

Il grafico della funzione è il seguente:



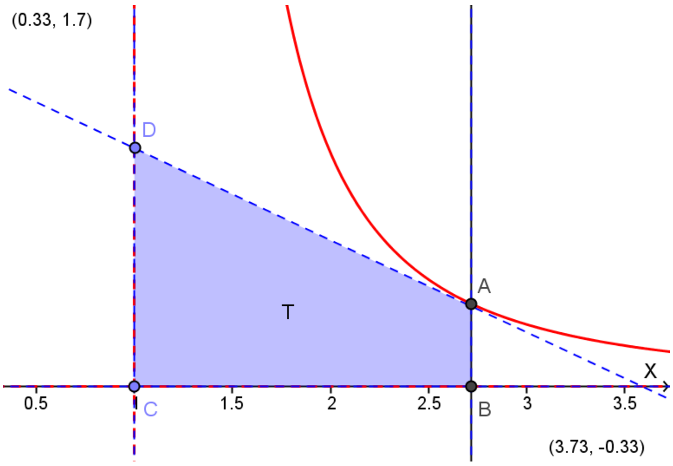
2)

Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di ascissa x=e, e si calcoli l'area del trapezio T che essa forma con l'asse x, con l'asintoto verticale e con la retta di equazione x=e.

Il punto di γ di ascissa x=e ha coordinate (e;1/e); il coefficiente angolare della tangente in tale punto è $f'(e) = -\frac{3}{e^2}$; la tangente ha equazione: $y - \frac{1}{e} == -\frac{3}{e^2}(x - e)$, cioè:

$$\boldsymbol{y = -\frac{3}{e^2}x + \frac{4}{e}}$$

Calcoliamo ora l'area del trapezio T che la tangente forma con l'asse x, con l'asintoto verticale e con la retta di equazione x=e.



Risulta:

$$AB = \frac{1}{e}, \qquad y_D = -\frac{3}{e^2} + \frac{4}{e} \quad \text{da cui} \quad CD = -\frac{3}{e^2} + \frac{4}{e} \qquad BC = e - 1$$

L'area richiesta è data da:

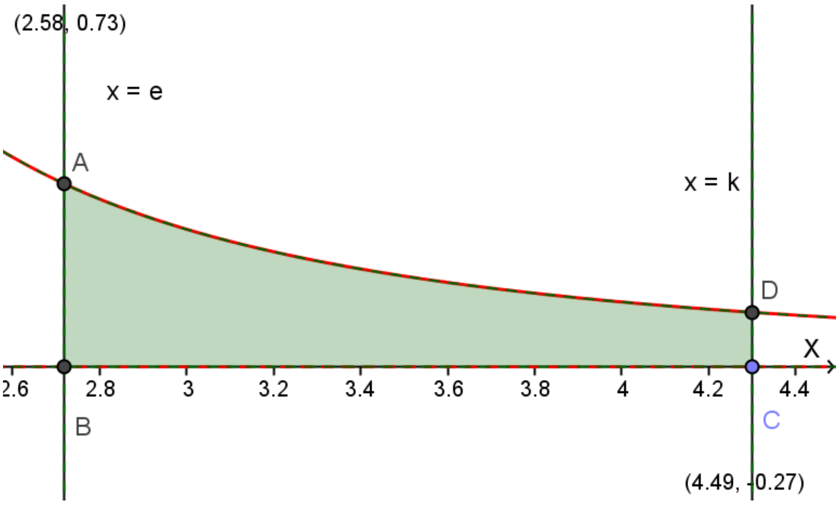
$$A(T) = \frac{(AB + CD) \cdot BC}{2} = \frac{\left(\frac{1}{e} + -\frac{3}{e^2} + \frac{4}{e}\right) \cdot (e - 1)}{2} = \frac{3 - 8e + 5e^2}{2e^2} \cong 1.23\ u^2$$

L'area del trapezio si può anche determinare con il calcolo integrale:

$$\int_1^e \left(-\frac{3x}{e^2} + \frac{4}{e}\right) dx = \frac{3 - 8e + 5e^2}{2e^2} \approx 1.23149$$

3)

Si calcoli l'area della regione S_k delimitata dalla curva γ , dall'asse x e dalle rette di equazioni ***x=e*** *ed* ***x=k*** *(con k>e).*



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$A(S_k) = \int_e^k f(x)dx = \int_e^k \frac{1}{x\, ln^2 x}dx = \int_e^k \left(ln^{-2}x\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{ln^{-1}x}{-1}\right]_e^k = \left[-\frac{1}{ln\, x}\right]_e^k =$$

$$= -\frac{1}{ln\, k} + 1$$

4)

Si faccia vedere che S_k tende verso un limite finito quando k tende a $+\infty$ e si confronti tale limite col valore numerico dell'area del trapezio T, arrotondato alla quarta cifra decimale.

$$\lim_{k\to+\infty} S_k = \lim_{k\to+\infty}\left(-\frac{1}{ln\, k}+1\right) = 1$$

L'area del trapezio T, **arrotondata alla quarta cifra decimale** è: $A(T) = 1.2315.$

$$A(T) - \lim_{k\to+\infty} S_k = 1.2315 - 1 = 0.2315$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri