# LICEO DELLA COMUNICAZIONE 2014 – SESSIONE STRAORDINARIA
## PROBLEMA 1

*Sia f la funzione definita da:*

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

## 1)

*Si studi f e se ne tracci il grafico $\gamma$ su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $Oxy$.*

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

**Dominio**: $x \neq \pm 2 \quad \Longrightarrow \quad -\infty < x < -2, \quad -2 < x < 2, \quad 2 < x < +\infty$

**Simmetrie notevoli:** f(-x) = - f(x), quindi la funzione è dispari (grafico simmetrico rispetto all'origine).

**Intersezioni con gli assi cartesiani:** il grafico interseca gli assi cartesiani in O=(0;0)

**Segno della funzione:** $\frac{x}{x^2-4} > 0 \quad se -2 < x < 0 \quad e \quad x > 2$
**Limiti:**

$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x}{x^2-4}\right) = 0^{\pm}$ ($y = 0$ asintoto orizzontale)

$\lim\limits_{x \to 2^{\pm}} \left(\frac{x}{x^2-4}\right) = \pm\infty$ ($x = 2$ asintoto verticale)

$\lim\limits_{x \to (-2)^{\pm}} \left(\frac{x}{x^2-4}\right) = \pm\infty$ ($x = -2$ asintoto verticale)

Non ci sono asintoti obliqui.

**Derivata prima:**

$f'(x) = \frac{-x^4-4}{(x^2-4)^2} \geq 0$ MAI

Quindi la funzione è sempre decrescente:

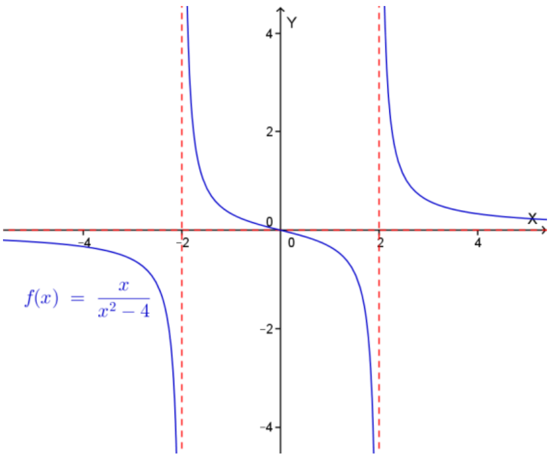
$in \ -\infty < x < -2, \ in \ -2 < x < 2, \ in \ 2 < x < +\infty$

**Derivata seconda:**

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x}{x^2-4}\right)=\frac{2\,x\,(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

$f''(x)\geq 0$ se $\frac{x}{x^2-4}\geq 0$, cioè dove la funzione è positiva; flesso nell'origine.

Il grafico $\gamma$ della funzione è il seguente:




## 2)

*Si scriva l'equazione della retta $t$ tangente a $\gamma$ nel punto di flesso. Detti A e B i due punti della curva (distinti dal punto di flesso), nei quali la tangente è parallela a $t$ , si scriva l'equazione della retta AB e si determini in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza dell'angolo acuto $\alpha$ da essa formato con $t$ .*

Il coefficiente angolare nel punto di flesso O=(0;0) è $f'(0)=-\frac{1}{4}$ , quindi:

$$t:\ y=-\frac{1}{4}x$$

Cerchiamo i punti di $\gamma$ in cui la tangente e parallela a t.

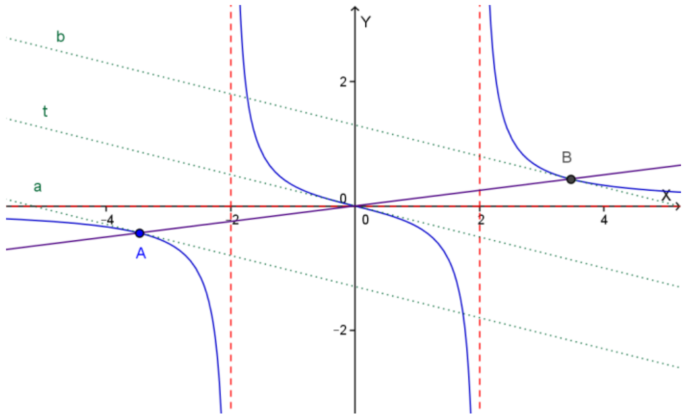
$$f'(x)=-\frac{1}{4}\quad\Longrightarrow\quad\frac{-x^4-4}{(x^2-4)^2}=-\frac{1}{4}\quad\Longrightarrow\cdots\Longrightarrow\quad x=\pm2\sqrt{3}$$

Quindi:

$$A=\left(-2\sqrt{3};-\frac{\sqrt{3}}{4}\right),\quad B=\left(2\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

Scriviamo ora l'equazione della retta AB; tale retta coincide con la retta per O ed A, poiché A e B sono simmetrici rispetto all'origine degli assi.

$$m(OA)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{8}\quad\Longrightarrow\quad retta\ AB:\ y=\frac{1}{8}x$$




Determiniamo l'ampiezza dell'angolo acuto $\alpha$ che la retta $AB$ forma con la retta $t$ .

$m(AB) = \frac{1}{8}$ $\qquad m(t) = -\frac{1}{4}$ $\qquad$ quindi:

$$\boldsymbol{tg\,\alpha} = \left|\frac{m(AB) - m(t)}{1 + m(AB) \cdot m(t)}\right| = \left|\frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{32}}\right| = \frac{3}{8} \cdot \frac{32}{31} = \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{31}} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = arctg\left(\frac{12}{31}\right) \cong 0.369\,rad$$

$\boldsymbol{\alpha = 0.369\,rad = 21.16° = 21°09'}$

## 3)

*Si verifichi che per la funzione $f(x)$ nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$ vale il teorema di Lagrange, mentre nell'intervallo $-1 \leq x \leq 4$ non vale il teorema di Rolle e se ne spieghino le ragioni.*

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

Verifichiamo che la funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$.

a) La funzione è continua su tutto l'intervallo (è discontinua solo in -2 e 2).
b) La funzione è derivabile nell'intervallo aperto $-1 < x < 1$ (non lo è solo in -2 e 2).
c) Esiste, quindi, almeno un punto c, nell'intervallo $-1 < x < 1$ per cui:
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)}$$

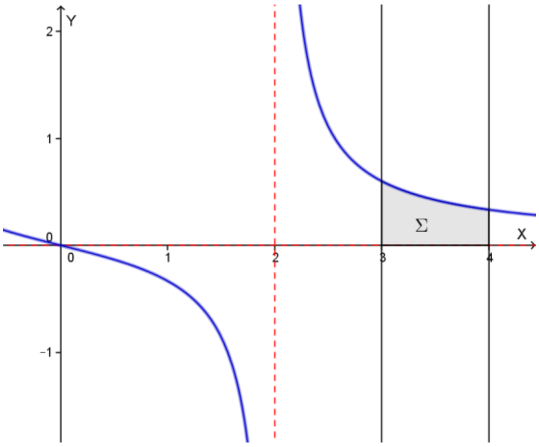
Verifichiamo che la funzione non soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $-1 \leq x \leq 4$.

a) La funzione non è continua nell'intervallo dato, poiché non lo è in $x = 2$, quindi non vale il teorema di Rolle in $-1 \leq x \leq 4$.

## 4)

*Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva $\gamma$ l'asse x e le rette di equazione $x = 3$ e $x = 4$.*

La superficie $\Sigma$ è la seguente:




La sua area si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}) = \int_3^4 f(x)dx = \int_3^4 \left(\frac{x}{x^2-4}\right) dx$$

Calcoliamo una primitiva di $\quad f(x) = \frac{x}{x^2-4}$.

$$\frac{x}{x^2-4} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} = \frac{a(x+2)+b(x-2)}{x^2-4} = \frac{(a+b)x+2a-2b}{x^2-4}$$

Quindi, per ogni x, deve essere: $x = (a+b)x + 2a - 2b$, da cui:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a-2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=1 \\ a=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int \left(\frac{x}{x^2-4}\right) dx = \left(\frac{\frac{1}{2}}{x-2} + \frac{\frac{1}{2}}{x+2}\right) dx = \frac{1}{2} ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|x+2| + k = \frac{1}{2} ln|x^2-4| + k$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}) = \int_3^4 \left(\frac{x}{x^2-4}\right) dx = \left[\frac{1}{2} ln|x^2-4|\right]_3^4 = \frac{1}{2}\ln(12) - \frac{1}{2}\ln(5) = \frac{1}{2} ln\left(\frac{12}{5}\right) \cong \mathbf{0.44}\ \boldsymbol{u^2}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri