

## ORDINAMENTO 2014 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{3}tg^3x + tg^2x + tgx$$

1)

Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico  $\gamma$  nell'intervallo  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

N.B. la funzione ha periodo  $T = \pi$ , quindi **possiamo limitare lo studio all'intervallo  $0 \leq x \leq \pi$ .**

**Dominio:**  $x \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < x \leq \pi$

**Simmetrie notevoli:** visto il dominio, la funzione non può essere né pari né dispari.

**Intersezioni con gli assi cartesiani:**

se  $x = 0$ ,  $y = 0$

se  $y = 0$ ,  $\frac{1}{3}tg^3x + tg^2x + tgx = 0 \Rightarrow tgx \left( \frac{1}{3}tg^2x + tgx + 1 \right) = 0$ , da cui:

- $tgx = 0$ :  $x = 0, x = \pi$
- $\frac{1}{3}tg^2x + tgx + 1 = 0$ : mai (il delta dell'equazione di secondo grado associata è negativo)

**Segno della funzione:**  $tgx \left( \frac{1}{3}tg^2x + tgx + 1 \right) > 0$  se  $tgx > 0$ :  $0 < x < \frac{\pi}{2}$

**Limiti:**

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\pm}} \left( \frac{1}{3}tg^3x + tg^2x + tgx \right) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\pm}} \left( \frac{1}{3}tg^3x \right) = \mp \infty: x = \frac{\pi}{2} \text{ asintoto verticale}$$

Non ci sono asintoti orizzontali né obliqui poiché la funzione è definita in un intervallo limitato.

### Derivata prima:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\tan^3(x)}{3} + \tan^2(x) + \tan(x) \right) = (\tan(x) + 1)^2 \sec^2(x)$$

$$f'(x) = (\operatorname{tg}x + 1)^2 \cdot \cos^2 x$$

Nel dominio della funzione risulta  $f'(x) = 0$  quando  $\operatorname{tg}x + 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}x = -1$  quindi per  $x = \frac{3}{4}\pi$  (punto di flesso a tangente orizzontale);  $f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{3}$ .

Flesso  $F = \left(\frac{4}{3}\pi; -\frac{1}{3}\right)$ .

$f'(x) = (\operatorname{tg}x + 1)^2 \cdot \cos^2 x > 0 \quad \forall x \neq \frac{3}{4}\pi$  : la funzione è sempre crescente.

### Derivata seconda:

$$f''(x) = 2(\operatorname{tg}x + 1)(\operatorname{tg}^2x + 1)(2\operatorname{tg}^2x + \operatorname{tg}x + 1)$$

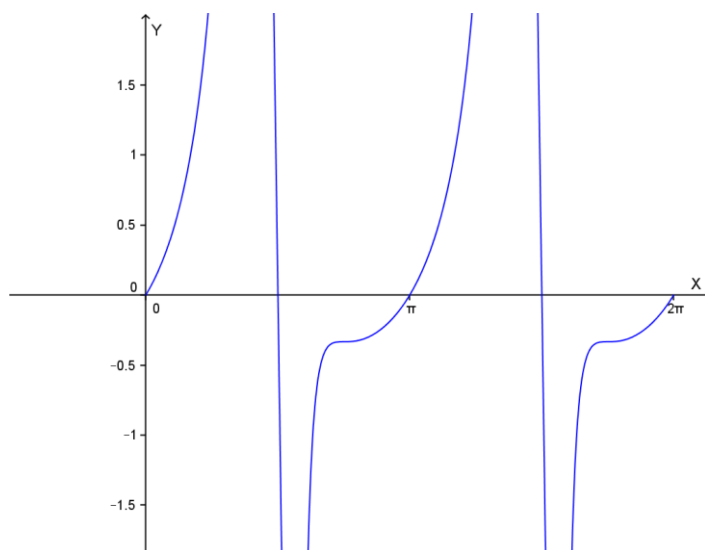
$f''(x) = 0$  per  $x = \frac{3}{4}\pi$  (in cui c'è il flesso a tangente orizzontale già trovato).

$f''(x) > 0$  quando  $\operatorname{tg}x + 1 > 0$  quindi per  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  e  $\frac{3}{4}\pi < x \leq \pi$  : in tali intervalli il grafico volge la concavità verso l'alto.

Il grafico  $\gamma$  della funzione

$$f(x) = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x$$

(nell'intervallo richiesto  $0 \leq x \leq 2\pi$ ) è il seguente:



2)

Si scrivano le equazioni delle tangenti a  $\gamma$  nei punti di intersezione con l'asse  $x$  e si verifichi che sono parallele.

Come già visto le intersezioni con l'asse  $x$  sono:  $A = (0; 0)$ ,  $B = (\pi; 0)$ ,  $C = (2\pi; 0)$ . Cerchiamo i coefficienti angolari delle tangenti in tali punti.

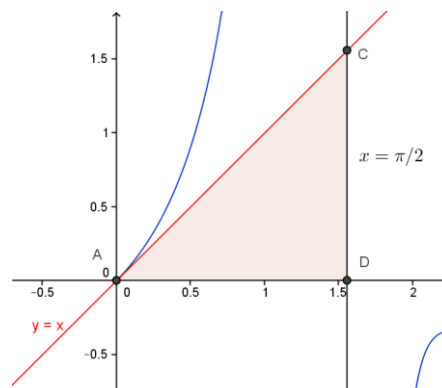
$$f'(x) = (tgx + 1)^2 \cdot \cos^2 x \Rightarrow m_A = f'(0) = 1, \quad m_B = f'(\pi) = 1, \quad m_C = f'(2\pi) = 1$$

Quindi le tangenti in A, B e C sono parallele.

Tangente in A:  $y = x$ , tangente in B:  $y = x - \pi$ , tangente in C:  $y = x - 2\pi$

3)

Si calcoli l'area del triangolo che la prima di tali tangenti forma con l'asse  $x$  e con la retta  $x = \frac{\pi}{2}$ , e il volume del cono generato da una rotazione completa attorno all'asse  $x$  del suddetto triangolo.



Il triangolo richiesto ACD ha area:

$$Area(ACD) = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{1}{8}\pi^2$$

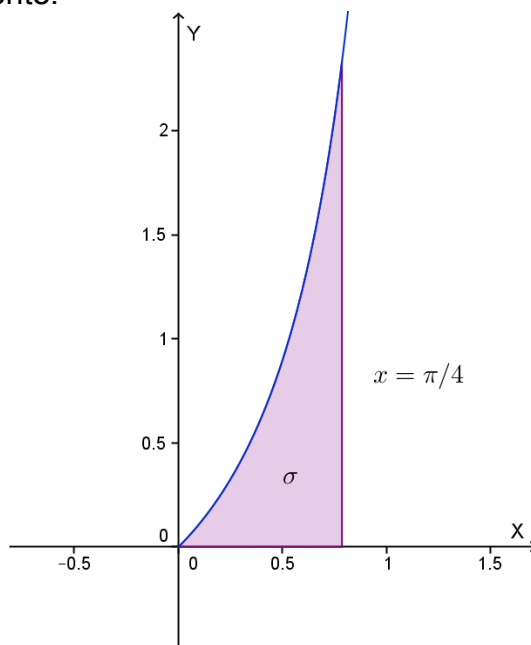
Il triangolo ACD, ruotando di un giro completo intorno all'asse  $x$ , genera un cono di altezza AD e raggio di base CD; il suo volume è quindi:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi CD^2 \cdot AD = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{1}{24}\pi^4\right) u^3$$

4)

Si calcoli l'area, nell'intervallo  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ , della superficie piana  $\sigma$ , delimitata dalla curva  $\gamma$ , dall'asse  $x$  e dalla retta  $x = \frac{\pi}{4}$ .

La superficie  $\sigma$  è la seguente:



La sua area si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$A(\sigma) = \int_0^{\pi/4} f(x) dx = \int_0^{\pi/4} \left( \frac{1}{3} tg^3 x + tg^2 x + tg x \right) dx$$

Poiché risulta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} tg^3 x + tg^2 x + tg x &= \frac{1}{3} tg x (tg^2 x) + 1 + tg^2 x - 1 + tg x = \\ &= \frac{1}{3} tg x (1 + tg^2 x - 1) + 1 + tg^2 x - 1 + tg x = \frac{2}{3} tg x + \left( \frac{1}{3} tg x + 1 \right) (1 + tg^2 x) - 1 \end{aligned}$$

$$\int \left( \frac{2}{3} tg x + \left( \frac{1}{3} tg x + 1 \right) (1 + tg^2 x) - 1 \right) dx = -\frac{2}{3} \ln |\cos x| + \frac{3}{2} \left( \frac{1}{3} tg x + 1 \right)^2 - x + C$$

Si avrà:

$$A(\sigma) = \left[ -\frac{2}{3} \ln |\cos x| + \frac{3}{2} \left( \frac{1}{3} tg x + 1 \right)^2 - x \right]_0^{\pi/4} = -\frac{\pi}{4} + \frac{7}{6} - \frac{2}{3} \ln \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cong 0.61 \text{ u}^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri