Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sei il responsabile del controllo della navigazione della nave indicata in figura 1 con il punto P. Nel sistema di riferimento cartesiano Oxy le posizioni della nave P, misurate negli istanti $t = 0$ e $t = 10$ (il tempo t è misurato in minuti, le coordinate x e y sono espresse in miglia nautiche), sono date dai punti $P_1(14, 13)$ e $P_2\ (12, 11)$. Negli stessi istanti la posizione di una seconda nave Q è data dai punti $Q_1(12, -2)$ e $Q_2(11, -1)$. Entrambe le navi si muovono in linea retta e con velocità costante, come rappresentato in Figura 1 (non in scala).

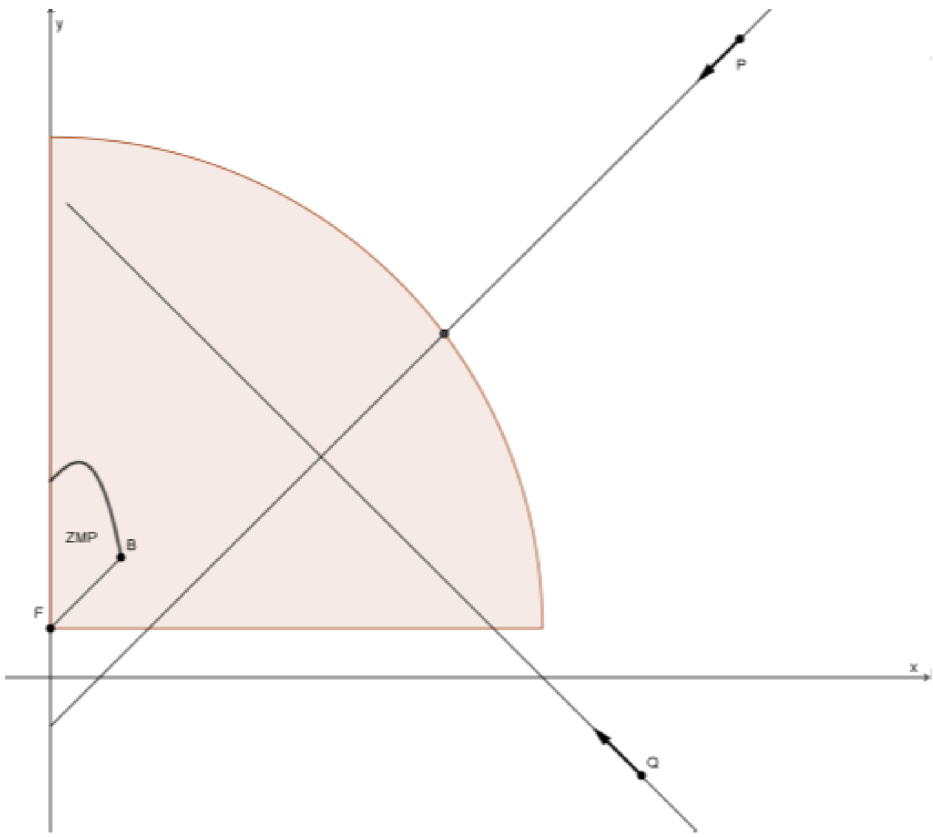


Figura 1

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Tema di: MATEMATICA

L'area indicata con ZMP è una "Zona Marittima Pericolosa". Il raggio luminoso di un faro posto nel punto *F* di coordinate (0, 1) spazza un quarto di un cerchio di raggio 10 miglia (vedi Figura 1).

1. Calcola dopo quanto tempo, rispetto all'istante in cui la nave *P* avvista per la prima volta il faro *F*, essa raggiunge la minima distanza dal faro, e la misura di tale distanza.
2. Determina la posizione della nave *P* nell'istante in cui per la prima volta la sua distanza dalla nave Q è pari a 9 miglia.
3. Determina l'istante *t* nel quale la distanza tra le due navi è minima e calcola il valore di tale distanza.

   Nel punto $B(X_B, Y_B)$ si trova una boa che segnala l'inizio della ZMP. La delimitazione della ZMP può essere descritta dai grafici delle funzioni *f* e g che si intersecano nel punto *B* e sono definite da:

$$f(x) = -x^3 + x + 4, \quad x \in \Re, \ \ 0 \leq x \leq x_B$$
$$g(x) = x + 1, \qquad x \in \Re, \qquad 0 \leq x \leq x_B$$

   e dalla retta $x = 0$.
4. Calcola l'area della ZMP.

PROBLEMA 2

Sia data la famiglia di funzioni $f(x) = \ln(\frac{a-x}{x^2+4}) + bx$.

1. Determina per quale valore di a e b il grafico della funzione passa per l'origine e ha un massimo nel punto di ascissa 2;
2. trovata l'espressione analitica della funzione, dopo aver definito il campo di esistenza, determina le equazioni degli eventuali asintoti;
3. determina l'area della regione piana delimitata dalla retta tangente alla curva nell'origine, dalla curva stessa e dalla retta passante per il suo punto di massimo e parallela all'asse *y*;
4. calcola infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse *x* della parte di piano delimitata dalla tangente in *O*, dalla bisettrice del primo quadrante e dalla retta passante per il suo punto di massimo e parallela all'asse *y*.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

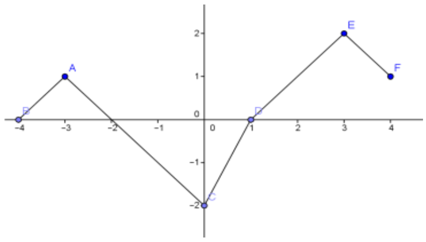
Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. La funzione $f(x)$ è continua per $x \in [-4, 4]$ il suo grafico è la spezzata passante per i punti:

   (-4, 0), (-3, 1), (-2, 0), (0, -2), (1, 0), (3, 2), (4, 1).

   Qual è il valor medio di $f(x)$ per $x \in [-4, 4]$?



2. Da un'analisi di mercato è risultato che il 32% della popolazione usa il prodotto A. Scelto a caso un gruppo di 12 persone, determinare il valore medio, la varianza e la deviazione standard della variabile casuale *X* = «numero di persone che usa il prodotto A». Calcolare inoltre la probabilità che, all'interno del gruppo scelto, il numero di persone che usano detto prodotto sia compreso tra 2 e 5, estremi inclusi.
3. In un riferimento cartesiano *Oxyz*, si verifichi che la circonferenza γ, intersezione della sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e del piano $z = 1$ ha centro in (0, 0, 1) e raggio $\sqrt{3}$. Si immagini che una sorgente di luce puntiforme *S* sia situata sul semiasse positivo delle z. A quale distanza dal centro della sfera si deve trovare *S* affinchè γ sia il confine tra la zona della sfera che risulta illuminata e quella che resta in ombra?
4. Sia $P(x) = x^2 + bx + c$. Si suppone che $P\big(P(1)\big) = P\big(P(2)\big) = 0$ e che $P(1) \neq P(2)$. Calcolare $P(0)$.
5. Risolvere l'integrale improprio: $\int_0^1 \ln(x)\, dx$.
6. La popolazione di una colonia di batteri è di 4000 batteri al tempo $t = 0$ e di 6500 al tempo $t = 3$. Si suppone che la crescita della popolazione sia esponenziale, rappresentabile, cioè, con l'equazione differenziale $\frac{dy}{dt} = k \cdot y$, dove k è una costante e y la popolazione di batteri al tempo *t*. Al tempo $t = 10$, la popolazione supererà i 20000 batteri?
7. Una particella si muove lungo una certa curva secondo le seguenti leggi:
   $$x(t) = 3 - 2 \cdot \cos(t), \quad y(t) = 2 + 3 \cdot \mathrm{sen}(t).$$
   Disegnare la traiettoria percorsa dalla particella per *t* che va da 0 a 2π secondi e determinare la velocità di variazione di θ, l'angolo formato dalla tangente alla traiettoria con l'asse *x*, per $t = \frac{2}{3}\pi$ secondi.
8. Se $f(x) = \int_1^{x^3} \frac{1}{1+\ln(t)}\, dt$ per $x \geq 1$, qual è il valore di $f'(2)$?
9. Risolvere il seguente problema posto nel 1547 da Ludovico Ferrari a Niccolò Tartaglia:

   "Si divida il numero 8 in 2 numeri reali non negativi in modo che sia massimo il prodotto di uno per l'altro e per la loro differenza".
10. Trovare l'equazione della retta perpendicolare al grafico di $f(x) = 4x^3 - 7x^2$ nel punto di ascissa 3.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.