



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
X02Y – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzo: LIC2 - SCIENTIFICO OPZIONE INTERNAZIONALE CINESE

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3, 3]$, il grafico Γ , disegnato in figura 1. Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni A, B, C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.

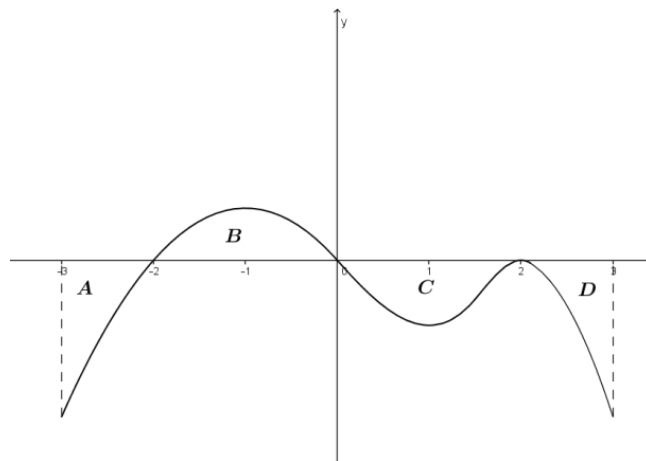


Figura 1

1. Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.
2. Individua i valori di $x \in [-3, 3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.
3. Calcola $g(0)$ e, se esiste, il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+g(x)}{2x}$.
4. Sia $h(x) = 3 \cdot f(2x + 1)$, determina il valore di $\int_{-2}^1 h(x) dx$.



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
X02Y – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzo: LIC2 - SCIENTIFICO OPZIONE INTERNAZIONALE CINESE

Tema di: MATEMATICA

PROBLEMA 2

Assegnate le funzioni reali $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = e^{x-2}$, e indicati con F e G i loro grafici in un riferimento cartesiano Oxy :

1. stabilisci dominio e codominio delle funzioni f e g , e traccia quindi i grafici relativi alle funzioni $a(x) = f(g(x))$ e $b(x) = g(f(x))$;
2. determina l'equazione della retta r , tangente a F nel suo punto di ascissa e^2 . Stabilisci inoltre se esiste una retta s , parallela a r , che sia tangente a G ;
3. determina l'equazione della retta t , parallela alla bisettrice del primo quadrante, che sia tangente a F . Dimostra che t risulta essere tangente anche a G ;
4. detta A la regione piana finita delimitata dall'asse y , dalla retta di equazione $y = x - 1$ e dal grafico G , calcola l'area di A e il volume del solido generato ruotando A intorno all'asse y .



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
X02Y – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzo: LIC2 - SCIENTIFICO OPZIONE INTERNAZIONALE CINESE

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

- Determinare l'espressione analitica della funzione $y = f(x)$ sapendo che la retta $y = -2x + 5$ è tangente al grafico di f nel secondo quadrante e che $f'(x) = -2x^2 + 6$.
- Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula,

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r),$$

dove R ed r sono i raggi e h l'altezza.

- Risolvere l'equazione: $5 \binom{n+1}{5} = 21 \binom{n-1}{4}$.
- Un solido ha per base la regione R del piano cartesiano compresa tra il grafico della funzione $y = \frac{1}{x^2+1}$ e l'asse delle x nell'intervallo $[0, 3]$. Per ogni punto P di R , di ascissa x , l'intersezione del solido col piano passante per P e ortogonale all'asse delle x è un rettangolo di altezza $3x$. Calcolare il volume del solido.
- Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x+5} - \sqrt{3x-2})$.
- Sia f la funzione, definita per tutti gli x reali, da

$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2,$$
 determinare il minimo di f .
- Detta $A(n)$ l'area del poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio C di raggio r , verificare che $A(n) = \frac{n}{2}r^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$ e calcolarne il limite per $n \rightarrow \infty$.
- I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm e 5 cm. Preso a caso un punto P all'interno del triangolo, qual è la probabilità che P disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici del triangolo?
- Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

determinare il parametro k in modo che nell'intervallo $[0, 2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.

- Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ ($x \in \mathbb{R}, x \geq 0$) divide in due porzioni il rettangolo ABCD avente vertici $A(1, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 2)$ e $D(1, 2)$. Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana. Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.