SESSIONE SUPPLETIVA – 2015 - QUESTIONARIO

QUESITO 1

Data la funzione integrale $\int_1^x \ln(t)\,dt$, determinare per quali valori di x il suo grafico incontra la retta di equazione $y = 2x + 1$.

Calcoliamo la funzione integrale determinando, per parti, una primitiva di $ln(t)$:

$$\int \ln(t)\,dt = \int 1 \cdot \ln(t)\,dt = \int (t)' \cdot \ln(t)\,dt = t\ln(t) - \int t \cdot \frac{1}{t}\,dt = t\ln(t) - t$$

Quindi:

$$y = f(x) = \int_1^x \ln(t)\,dt = [t\ln(t) - t]_1^x = x\ln(x) - x - (0 - 1) = x\ln(x) - x + 1$$

Intersechiamo le due curve (notiamo che deve essere x>0):

$$\begin{cases} y = x\ln(x) - x + 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \quad x\ln(x) - x + 1 = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad x\ln(x) = 3x \quad \Rightarrow \ln(x) = 3$$

da cui $x = e^3$.

N.B. La funzione integrale in realtà è definita anche per $x = 0$, in cui vale 1, come si può verificare calcolando l'integrale improprio $\int_1^0 \ln(t)\,dt = \lim_{x\to 0^+}(x\ln(x) - x + 1) = 1$.
Oltre ad $x = e^3$ abbiamo quindi anche la soluzione x=0.

QUESITO 2

Data la famiglia di funzioni $y = -x^3 + 6kx + 33$ trovare la funzione tangente nel punto di ascissa 3 ad una retta parallela alla bisettrice del primo quadrante. Determinare l'equazione di detta tangente.

Deve essere $y'(3) = 1$, quindi:

$$y' = -3x^2 + 6k\,, \quad y'(3) = -27 + 6k = 1 \quad \Rightarrow \quad 6k = 28 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{14}{3}$$

La funzione richiesta ha quindi equazione:

$$y = -x^3 + 28x + 33$$

L'ordinata del punto di tangenza è: $y(3) = -27 + 84 + 33 = 90$. La tangente è quindi:

$$y - 90 = 1 \cdot (x - 3)\,, \quad y = x + 87$$

QUESITO 3

Vengono lanciati due dadi. Dei due punteggi, viene considerato il maggiore; se sono uguali, viene considerato il punteggio comune dei due dadi. Detto X il punteggio registrato, riportare in una tabella la distribuzione di probabilità di X e mostrare che $p(X=3)=\frac{5}{36}$. *Calcolare inoltre la media e la varianza di X.*

La variabile aleatoria X può assumere i valori 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Calcoliamo le probabilità di X, tenendo presente che nel lancio di due dadi i casi possibili sono 36 (6 possibilità per il primo dado e sei possibilità per il secondo).
Indichiamo con (a,b) la coppia di un risultato con a relativo al primo dado e b al secondo.

X=1 se si ha la coppia (1,1): p(X=1)=1/36.
X=2 se si hanno le coppie (1,2), (2,1), (2,2): p(X=2)=3/36.
X=3 se si hanno le coppie (1,3), (3,1), (2,3), (3,2), (3,3): p(X=3)=5/36.
X=4 se si hanno le coppie (1,4), (4,1), (2,4), (4,2), (3,4), (4,3), (4,4): p(X=4)=7/36
X=5 se si hanno le coppie (1,5), (5,1), (2,5), (5,2), (3,5), (5,3), (4,5), (5,4), (5,5): p(X=5)=9/36
X=6 se si hanno le coppie (1,6), (6,1), (2,6), (6,2), (3,6), (6,3), (4,6), (6,4), (5,6), (6,5), (6,6): p(X=6)=11/36

Abbiamo quindi la seguente tabella di distribuzione delle probabilità di X:

x	1	2	3	4	5	6
p(X=x)	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

Notiamo che, in particolare, si ha $p(X=3)=\frac{5}{36}$.

La media di X è data da:

$$m(X)=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4+x_5p_5+x_6p_6$$

$$m(X)=1\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{3}{36}+3\cdot\frac{5}{36}+4\cdot\frac{7}{36}+5\cdot\frac{9}{36}+6\cdot\frac{11}{36}=\frac{161}{36}\cong 4.472$$

La varianza di X è data da:

$$Var(X)=\sigma^2=(x_1-m)^2\cdot p_1+(x_2-m)^2\cdot p_2+(x_3-m)^2\cdot p_3+(x_4-m)^2\cdot p_4+$$
$$+(x_5-m)^2\cdot p_5+(x_6-m)^2\cdot p_6$$

$$\sigma^2=\left(1-\frac{161}{36}\right)^2\cdot\frac{1}{36}+\left(2-\frac{161}{36}\right)^2\cdot\frac{3}{36}+\left(3-\frac{161}{36}\right)^2\cdot\frac{5}{36}+\left(4-\frac{161}{36}\right)^2\cdot\frac{7}{36}+$$
$$+\left(5-\frac{161}{36}\right)^2\cdot\frac{9}{36}+\left(6-\frac{161}{36}\right)^2\cdot\frac{11}{36}=\frac{2555}{1296}\cong 1.971$$

QUESITO 4

In un sistema di riferimento cartesiano nello spazio Oxyz sono dati i punti $A\ (-3,4,0)$ *e* $C\ (-2,1,2)$. *I tre punti O, A e C giacciono su un piano E. Determinare l'equazione che descrive il piano E.*

Il generico piano ha equazione: $ax + by + cz + d = 0$. Im ponendo il passaggio per i tre punti O, A e C abbiamo:

$$\begin{cases} d = 0 \\ -3a + 4b + d = 0 \\ -2a + b + 2c + d = 0 \end{cases} \; ; \quad \begin{cases} d = 0 \\ -3a + 4b = 0 \\ -2a + b + 2c = 0 \end{cases} \; ; \quad \begin{cases} d = 0 \\ b = \frac{3}{4}a \\ -2a + \frac{3}{4}a + 2c = 0 \end{cases} \; ; \quad \begin{cases} d = 0 \\ b = \frac{3}{4}a \\ c = \frac{5}{8}a \end{cases} ;$$

Quindi il piano E ha equazione:

$$ax + \frac{3}{4}ay + \frac{5}{8}az = 0 \quad \Longrightarrow \quad 8x + 6y + 5z = 0$$

QUESITO 5

Determinare il volume del solido generato dalla rotazione attorno alla retta di equazione $x = 2$ *della parte di piano delimitata dalla parabola di equazione* $y^2 = 8x$ *e dalla retta stessa.*

Trasliamo la retta e la parabola secondo il vettore $\vec{v} = (-2; 0)$; le equazioni di questa traslazione sono:

$$\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y \end{cases}$$

L'equazione della retta $X = 0 \quad (asse\ delle\ ordinate)$

La nuova parabola ha equazione: $Y^2 = 8(X + 2)\,,\quad Y^2 = 8X + 16 \quad \Longrightarrow \quad X = \frac{Y^2 - 16}{8}$

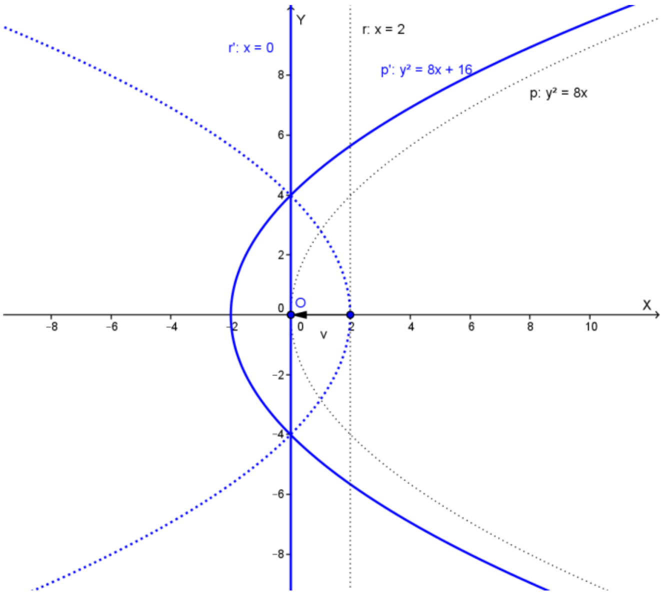
La parte di piano compresa fra la retta e la parabola (segmento parabolico) deve ora ruotare intorno all'esse delle y, come indicato in figura.

Il volume richiesto si può quindi ottenere mediante il calcolo del seguente integrale:

$$V = \pi \int_{-4}^{4} X^2\, dY = \pi \int_{-4}^{4} \left(\frac{Y^2 - 16}{8}\right)^2 dY = \frac{\pi}{64} \int_{-4}^{4} (Y^4 - 32Y^2 + 256)\, dY =$$

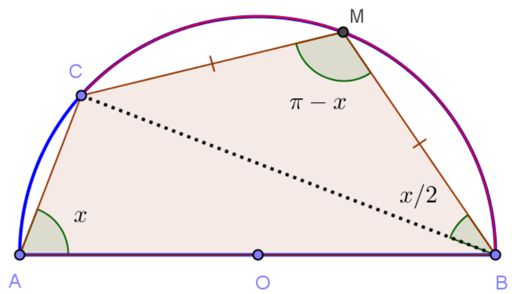
$$= \frac{\pi}{32} \int_{0}^{4} (Y^4 - 32Y^2 + 256)\, dY = \frac{\pi}{32} \left[\frac{Y^5}{5} - \frac{16}{3}Y^3 + 256Y\right]_0^4 = \frac{\pi}{32} \left(\frac{4^5}{5} - \frac{32}{3} \cdot 4^3 + 256 \cdot 4\right) =$$

$$= \frac{\pi}{32} \cdot \frac{8192}{15} = \frac{256\boldsymbol{\pi}}{15}\ u^3 \cong 53.617\ u^3 = V(rotazione)$$



QUESITO 6

Preso un punto C su una semicirconferenza di diametro AB=2r, sia M il punto medio dell'arco BC. Determinare il valore massimo che può assumere l'area del quadrilatero ABMC.



Posto $B\hat{A}C = x$ risulta: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
Inoltre $B\widehat{M}C = \pi - x$, essendo A ed M angoli opposti di un quadrilatero inscritto in una circonferenza. Essendo uguali gli archi CM e BM sono anche uguali le corde CM e BM; perciò il triangolo BCM è isoscele sulla base BC. Inoltre:

$$C\hat{B}M = \frac{\pi - (\pi - x)}{2} = \frac{x}{2}$$

Calcoliamo la misura del lato AC: $AC = 2r \cdot \cos(x)$; quindi l'area del triangolo ABC è:

$Area(ABC) = AC \cdot AB \cdot sen(x) \cdot \frac{1}{2} = 2r \cdot \cos(x) \cdot 2r \cdot \frac{sen(x)}{2} = 2r^2 \cdot sen(x)\cos(x)$

Calcoliamo la misura dei segmenti BM e CM (uguali). Per il teorema della corda risulta:

$CM = 2r \cdot sen\left(\frac{x}{2}\right)$. L'area del triangolo BCM è quindi:

$Area(BCM) = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot CM \cdot sen(\pi - x) = \frac{1}{2} \cdot CM^2 \cdot sen(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(2r \cdot sen\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \cdot sen(x) =$

$= 2r^2 \cdot sen^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot sen(x) = 2r^2 \cdot \frac{1-\cos(x)}{2} \cdot sen(x) = r^2 \cdot sen(x) \cdot (1 - \cos(x))$

L'area del quadrilatero ABMC è quindi:

$Area(ABMC) = Area(ABC) + Area(BCM) =$

$= 2r^2 \cdot sen(x)\cos(x) + r^2 \cdot sen(x) \cdot (1 - \cos(x)) = r^2 \cdot sen(x)cos(x) + r^2 \cdot sen(x) =$

$= r^2 sen(x)(1 + \cos(x))$

Tale area è massima, per $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, se lo è la funzione:

$y = f(x) = sen(x)(1 + \cos(x))$

Si tratta di una funzione continua (e derivabile) in un intervallo chiuso e limitato, quindi, per il teorema di Weierstrass, ammette massimo e minimo assoluti, che sono da ricercarsi fra i valori assunti agli estremi dell'intervallo e fra i valori nei punti che annullano la derivata prima.

Calcoliamo i valori agli estremi dell'intervallo:

$f(0) = 0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$f'(x) = \cos(x)(1 + \cos(x)) + sen(x)\big(-sen(x)\big) = \cos(x) + \cos^2(x) - sen^2(x) = 0 \quad se:$

$\cos(x) + \cos^2(x) - 1 + \cos^2(x) = 2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0;$

$\cos(x) = \frac{-1 \pm 3}{4} \quad da\ cui \quad \cos(x) = -1 \quad e \quad \cos(x) = \frac{1}{2}$

Se $\cos(x) = -1$, $x = \pi$: $non\ accettabile$

Se $\cos(x) = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{3}$. Per tale valore di x risulta: $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{3} \cong 1.3$

Il massimo valore si ha quindi per $x = \frac{\pi}{3}$: per tale valore il quadrilatero ha area massima, che vale:

$Area(ABMC) = r^2 \cdot sen(x) \cdot (1 - \cos(x)) = r^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{4}\sqrt{3}r^2 = Area\ massima$

Osserviamo che il quadrilatero di area massima è il semi-esagono regolare inscritto nella circonferenza.

QUESITO 7

Una fabbrica produce mediamente il 3% di prodotti difettosi. Determinare la probabilità che in un campione di 100 prodotti ve ne siano 2 difettosi, usando:

- *la distribuzione binomiale;*
- *la distribuzione di Poisson.*

La probabilità che un pezzo sia difettoso è pari a $0.03 = p$; la probabilità che un pezzo non sia difettoso è quindi $q = 1 - p = 0.97$.

Calcoliamo, nei due casi richiesti, la probabilità che su 100 prodotti ve ne siano 2 difettosi.

Distribuzione binomiale.

Ricordiamo che, secondo la distribuzione binomiale, la probabilità che su n prove si abbiamo x successi è data da:

$$p(n,x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} = p(100,2) = \binom{100}{2} 0.03^2 \cdot 0.97^{98} \cong 0.225 \cong 22.5\ \%$$

Distribuzione di Poisson.

Ricordiamo che, secondo la distribuzione di Poisson, la probabilità che su n prove si abbiamo x successi è data da:

$$p = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

Dove λ, valor medio, è dato da: $\lambda = np = 100 \cdot 0.03 = 3$; quindi:

$$p = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} = \frac{3^2 \cdot e^{-3}}{2!} = \frac{9}{2e^3} \cong 0.224 \cong 22.4\ \%$$

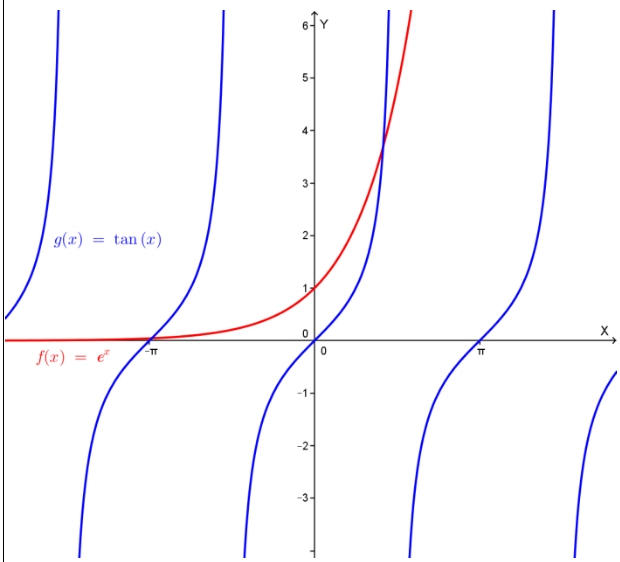
Come si vede le due probabilità sono praticamente uguali.

QUESITO 8

Provare che la funzione $y = e^x - tgx$ ha infiniti zeri, mentre la funzione $y = e^x - arctgx$ non ne ha alcuno.

Rappresentiamo nello stesso piano cartesiano le funzioni di equazioni:

$f(x) = e^x \quad e \quad g(x) = tg(x)$

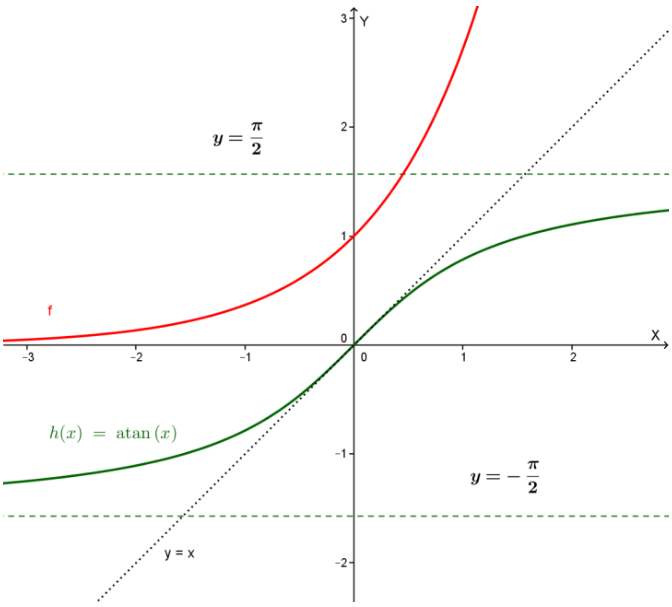


Data la periodicità della funzione tangente, che assume in ogni periodo ogni valore reale e dato il fatto che la funzione esponenziale è definita e continua su tutto l'asse reale (assumendo valori sempre positivi), i due grafici si intersecano infinite volte: ciò equivale a dire chela funzione $y = e^x - tgx$ ha infiniti zeri.

Procediamo in modo analogo per la funzione $y = e^x - arctgx.$
Rappresentiamo nello stesso piano cartesiano le funzioni di equazioni:

$f(x) = e^x \quad e \quad h(x) = arctg(x)$.

Osservando che la funzione h è compresa tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ e che per x positivi è al di sotto della bisettrice del primo e terzo quadrante, da grafico delle due funzioni si deduce che non ci sono punti di intersezione: ciò equivale a dire chela funzione $y = e^x - arctgx$ non ammette zeri.



QUESITO 9

Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x \cdot e^x$, adoperando la definizione di derivata.

In base alla definizione di derivata si ha:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) \cdot e^{x+h} - x \cdot e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) \cdot e^{x+h} - x \cdot e^x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x \cdot e^{x+h} + h \cdot e^{x+h} - x \cdot e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x \cdot e^{x+h} - x \cdot e^x + h \cdot e^{x+h}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x \cdot e^x (e^h - 1) + h \cdot e^{x+h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x \cdot e^x (e^h - 1)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot e^{x+h}}{h} = x \cdot e^x + e^x = f'(x)$$

N.B.

Abbiamo usato il limite notevole:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

QUESITO 10

Sia la derivata seconda di una funzione reale $f(x)$ data da $f''(x) = 3x - 6$. Determinare l'espressione di $f(x)$, sapendo che il grafico della funzione passa per il punto $P\ (2, -7)$ e che l'angolo formato dalla tangente al grafico di $f(x)$ con l'asse y nel punto di ascissa $x = 0$ vale 45°.

Da $f''(x) = 3x - 6$ ricaviamo:

$$f'(x) = \int (3x - 6)\ dx = \frac{3}{2}x^2 - 6x + a\ , \quad con\ \ a\ \ parametro\ reale$$

$$f(x) = \int \left(\frac{3}{2}x^2 - 6x + a\right) dx = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + ax + b\ \ , \quad con\ \ b\ \ parametro\ reale$$

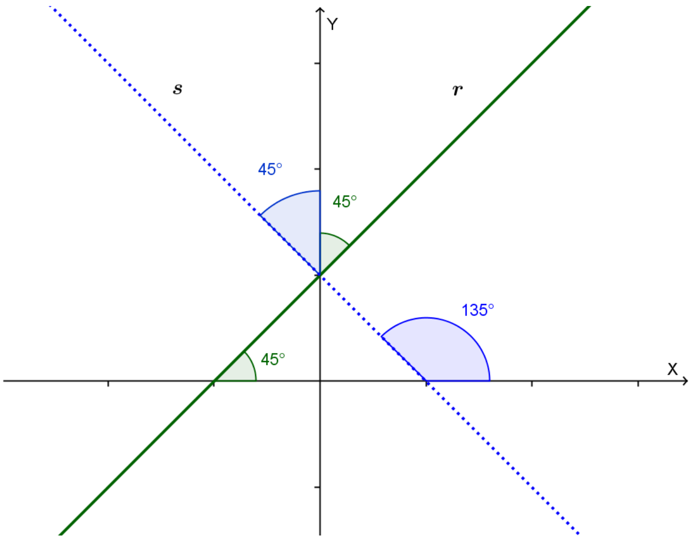
Siccome il grafico della funzione passa per $P\ (2, -7)$, risulta:
$-7 = 4 - 12 + 2a + b \quad \Longrightarrow \quad b = 1 - 2a$

Il coefficiente angolare della tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa $x = 0$ è dato da:
$m = f'(0) = a$

La tangente al grafico della funzione nel punto ascissa $x = 0$ forma con l'asse y un angolo di 45°, quindi formerà con l'asse x un angolo α di 135° oppure 45° (si veda la figura seguente), perciò:

$tg(\alpha) = m = \pm 1 = a$

La tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa nulla, dovendo formare un angolo di 45° con l'asse y, può avere una delle due possibili rappresentazioni:



Si hanno quindi due soluzioni:

Se $a = 1$ (tangente la retta r) risulta $b = 1 - 2a = -1$; in tal caso la funzione ha equazione:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + ax + b = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + x - 1 = f(x)$$

Se $a = -1$ (tangente la retta s) risulta $b = 1 - 2a = 3$; in tal caso la funzione ha equazione:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + ax + b = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 - x + 3 = f(x)$$

N.B.

Se l'angolo fra la tangente e l'asse y è considerato orientato, con la convenzione secondo cui gli angoli positivi sono quelli orientati in senso antiorario, abbiamo solo la prima soluzione (l'angolo che ha come primo lato la tangente e secondo lato l'asse y è +45° nel primo caso appunto, indicato nel grafico con la retta r in verde continuo).

Con la collaborazione di Angela Santamaria