



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02 – SCIENTIFICO
LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Considerata la funzione $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$G(x) = \int_0^{2x} e^t \operatorname{sen}^2(t) dt,$$

svolgi le richieste che seguono.

1. Discuti campo di esistenza, continuità e derivabilità della funzione $G(x)$. Individua gli intervalli di positività/negatività e le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani.
2. Determina l'esistenza degli asintoti della funzione $G(x)$, motivando opportunamente la risposta.
3. Individua i punti stazionari della funzione $G(x)$, riconoscendone la tipologia, e i punti di flesso. Disegna quindi il grafico della funzione, motivando le scelte fatte.
4. Studia l'andamento dei coefficienti angolari delle rette tangenti alla funzione $G(x)$ nei suoi punti di flesso a tangente obliqua, determinando in particolare se tali rette formano un fascio di rette parallele.

PROBLEMA 2.

Sia Γ il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 + k \cdot e^{-x}} \quad k \in \mathbb{R}, k > 0$$

definita sull'insieme \mathbb{R} dei numeri reali.

1. Relativamente al grafico Γ , mostra come variano le coordinate del suo punto di flesso P in funzione del parametro k e verifica che in tale punto la pendenza del grafico è indipendente da k .
2. Dopo aver verificato che la funzione $p(x) = \log(1 + k \cdot e^{-x}) + x$ è una primitiva di f , determina l'area della regione piana compresa tra Γ , l'asse y , l'asse x e la retta di equazione $x = \log(\alpha)$. Che valore deve assumere α perché tale area sia uguale a 1?
3. Dimostra che

$$g(x) = \log\left(\frac{kx}{1-x}\right)$$



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

è la funzione inversa di f e tracciane il grafico. Prova inoltre che la suddetta funzione g è crescente in tutto il suo dominio e che il grafico della funzione h , definita come

$$h(x) = f(x) + g(x),$$

interseca l'asse x in un unico punto.

4. Considerata, per $x \in \mathbb{R}$, la funzione

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

determina le equazioni dei suoi asintoti e traccia il grafico di $F(x)$.

QUESTIONARIO

1. Tre circonferenze di raggio 1 sono tangenti esternamente una all'altra. Qual è l'area della regione interna che esse delimitano?
2. In un'urna ci sono 20 biglie, ognuna delle quali è rossa o nera. Stabilire quante sono quelle nere, sapendo che estraendo 2 biglie senza riporre la prima estratta, la probabilità di estrarre almeno una biglia nera è $27/38$.
3. Dato un cilindro equilatero e la sfera ad esso circoscritta, qual è la probabilità che un punto interno alla sfera cada all'interno del cilindro?
4. Un solido ha per base la regione R del piano cartesiano compresa tra il grafico della funzione:

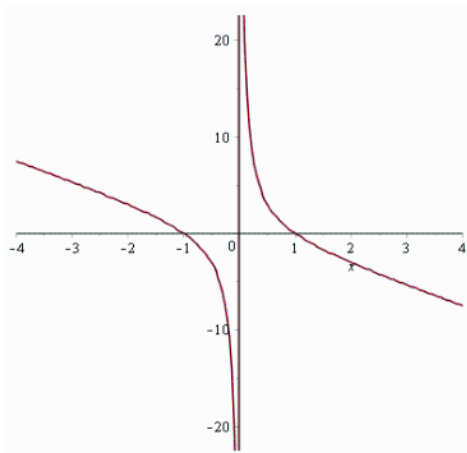
$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

e l'asse delle x nell'intervallo $[0, 3]$; le sue sezioni ottenute su piani perpendicolari all'asse x sono tutti triangoli isosceli di altezza kx , con $k \in \mathbb{R}$. Determinare k in modo che il volume del solido sia pari a 2.

5. Il grafico di un polinomio di 3° grado è tangente all'asse x nell'origine e interseca nuovamente l'asse x in un punto di ascissa positiva. L'ascissa e l'ordinata del punto di massimo relativo sono tra loro uguali e diverse da 0. Determinare l'area della regione piana limitata che è compresa tra l'asse x e il grafico del polinomio, sapendo che anche tale area coincide numericamente con il valore comune all'ascissa e all'ordinata nel punto di massimo.
6. Il grafico in figura è quello della derivata prima $f'(x)$ di una funzione $f(x)$ continua in \mathbb{R} . Il grafico riportato è simmetrico rispetto all'origine ed ha come asintoti le rette di equazione $x = 0$ e $5x + 2y = 0$.



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca



Descrivere le principali caratteristiche relative all'andamento della funzione $f(x)$ e tracciarne, indicativamente, un possibile grafico. Tracciare inoltre il grafico della funzione $f''(x)$.

7. Sono date le funzioni $f(x) = e^{3-x}$ e $g(x) = e^{2x}$. Determinare l'area della regione limitata racchiusa dall'asse x e dai grafici di f e di g .
8. Un giocatore di basket si esercita ai tiri liberi. Normalmente ha una quota di canestri dell'80%. Con quale probabilità va a canestro esattamente due volte su tre tiri?

Individua un evento E per il quale valga:

$$P(E) = \binom{50}{40} \cdot 0,8^{40} \cdot 0,2^{10}$$

9. Dati i punti $A(4, 14, 17)$, $B(16, 11, 14)$, $C(16, 2, 23)$:
- si dimostri che il triangolo ABC è isoscele e rettangolo;
 - quali sono le coordinate del punto D tale che $ABCD$ sia un quadrato?
10. Si considerino nello spazio il punto $P(1, 2, -1)$ ed il piano α di equazione $x - 2y + z + 4 = 0$.
- Verificare che $P \in \alpha$;
 - determinare le equazioni delle superfici sferiche di raggio 6 che sono tangenti ad α in P .

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana. Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.