Sessione ordinaria 2016
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

X02C – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzo: IB72 – SCIENTIFICO COMUNICAZIONE OPZIONE SPORTIVA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

La funzione $f: \Re \rightarrow \Re$ è così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(x)}{x} & per\ x \neq 0 \\ 1 & per\ \ x = 0 \end{cases}$$

1. Prova che f è una funzione pari e che essa è derivabile in $x = 0$. Dimostra inoltre che la funzione f ha un massimo assoluto in $x = 0$.
2. Traccia, in uno stesso diagramma, i grafici indicativi delle tre funzioni

$$y = f(x) \qquad y = \frac{1}{x} \qquad y = -\frac{1}{x}$$

e mostra che il grafico di f è tangente agli altri due in infiniti punti. È vero che tali punti di tangenza sono anche massimi o minimi relativi della funzione f ?

3. Detta $\Re_0$ la regione piana di area finita delimitata dal grafico di f, dall'asse x e dall'asse y, si indica con V_0 il volume del solido generato ruotando $\Re_0$ intorno all'asse y. Si indica inoltre con $\Re_n$ la regione piana delimitata dal grafico di f e dal tratto dell'asse x compreso tra $n\pi$ e $(n+1)\pi$, qualsiasi sia $n \in \mathbb{N}$, e con V_n il volume del rispettivo solido di rotazione. Dimostra che risulta:

$$V_0 = V_n = 4\pi$$

4. Sia definita la funzione:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Tenuto conto del fatto che

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$$

traccia un grafico indicativo dell'andamento della funzione F, individuandone, in particolare, le ascisse dei punti di massimo e di minimo[1].

[1] Nota: la primitiva della funzione f non è esprimibile tramite le usuali funzioni analitiche.

Sessione ordinaria 2016
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

X02C – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzo: IB72 – SCIENTIFICO COMUNICAZIONE OPZIONE SPORTIVA

Tema di: MATEMATICA

PROBLEMA 2.

Nella figura 1 è rappresentato il grafico Γ della funzione continua $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, derivabile in $]0, +\infty)$, e sono indicate le coordinate di alcuni suoi punti.

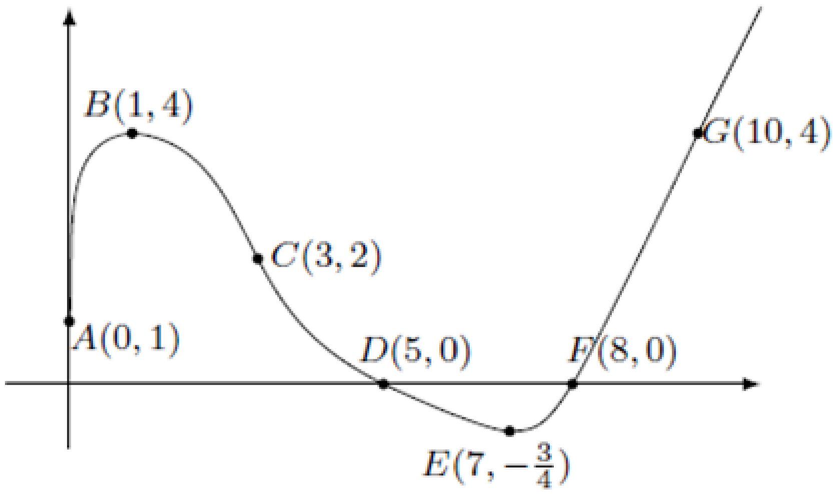


Figura 1

È noto che Γ è tangente all'asse y in A, che B ed E sono un punto di massimo e uno di minimo, che C è un punto di flesso con tangente di equazione $2x + y - 8 = 0$.

Nel punto D la retta tangente ha equazione $x + 2y - 5 = 0$ e per $x \geq 8$ il grafico consiste in una semiretta passante per il punto G. Si sa inoltre che l'area della regione delimitata dall'arco $ABCD$, dall'asse x e dall'asse y vale 11, mentre l'area della regione delimitata dall'arco DEF e dall'asse x vale 1.

1. In base alle informazioni disponibili, rappresenta indicativamente i grafici delle funzioni

$$y = f'(x)$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Quali sono i valori di $f'(3)$ e $f'(5)$? Motiva la tua risposta.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

X02C – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzo: IB72 – SCIENTIFICO COMUNICAZIONE OPZIONE SPORTIVA

Tema di: MATEMATICA

2. Rappresenta, indicativamente, i grafici delle seguenti funzioni:

$$y = |f'(x)|$$

$$y = |f(x)|'$$

$$y = \frac{1}{f(x)}$$

specificando l'insieme di definizione di ciascuna di esse.

3. Determina i valori medi di $y = f(x)$ e di $y = |f(x)|$ nell'intervallo $[0,8]$, il valore medio di $y = f'(x)$ nell'intervallo $[1,7]$ e il valore medio di $y = F(x)$ nell'intervallo $[9,10]$.
4. Scrivi le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $F(x)$ nei suoi punti di ascisse 0 e 8, motivando le risposte.

QUESTIONARIO

1. È noto che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Stabilire se il numero reale u, tale che

$$\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2} dx = 1$$

è positivo oppure negativo. Determinare inoltre i valori dei seguenti integrali, motivando le risposte:

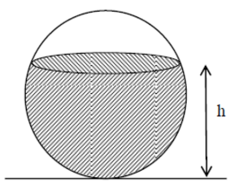
$$A = \int_{-u}^{u} x^7 e^{-x^2} dx \qquad B = \int_{-u}^{u} e^{-x^2} dx \qquad C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2} dx$$

2. Data una parabola di equazione

$$y = 1 - ax^2, \qquad \text{con } a > 0$$

si vogliono inscrivere dei rettangoli, con un lato sull'asse x, nel segmento parabolico delimitato dall'asse x. Determinare a in modo tale che il rettangolo di area massima sia anche il rettangolo di perimetro massimo.

3. Un recipiente sferico con raggio interno r è riempito con un liquido fino all'altezza h. Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare che il volume del liquido è dato da: $V = \pi \cdot (rh^2 - \frac{h^3}{3})$.



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

X02C – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzo: IB72 – SCIENTIFICO COMUNICAZIONE OPZIONE SPORTIVA

Tema di: MATEMATICA

4. Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla, con 4 possibili risposte di cui solo una è esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente almeno a 8 domande. Qual è la probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande?

5. Quali punti del grafico della funzione

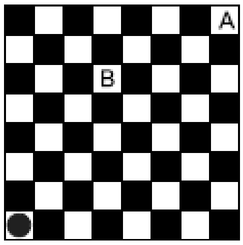
$$f(x) = \frac{2}{x^2}$$

hanno distanza minima dall'origine?

6. Si stabilisca se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando la risposta:

"Esiste un polinomio $P(x)$ tale che: $|P(x) - \cos(x)| \leq 10^{-3}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$".

7. Una pedina è collocata nella casella in basso a sinistra di una scacchiera, come in figura. Ad ogni mossa, la pedina può essere spostata o nella casella alla sua destra o nella casella sopra di essa. Scelto casualmente un percorso di 14 mosse che porti la pedina nella casella d'angolo opposta A, qual è la probabilità che essa passi per la casella indicata con B?



8. Calcolare il valore del limite:

$$\lim_{x \to 6} \frac{6 - \sqrt{5x + 6}}{x^2 - 8x + 12}$$

senza adoperare la regola de l'Hôpital.

9. Data la funzione $f(x)$ definita in $\mathbb{R}$, $f(x) = e^x(2x + x^2)$, individuare la primitiva di $f(x)$ il cui grafico passa per il punto $(1, 2e)$.

10. Sia f la funzione così definita nell'intervallo $]1, +\infty)$:

$$f(x) = \int_e^{x^2} \frac{t}{\ln t}\, dt$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $\sqrt{e}$.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.