SIMULAZIONE - 29 APRILE 2016 - PROBLEMA 1

Le centraline di controllo del Po a Pontelagoscuro (FE) registrano il valore della portata dell'acqua, ovvero il volume d'acqua che attraversa una sezione trasversale del fiume nell'unità di tempo. Come responsabile della sicurezza della navigazione fluviale in quel tratto del Po, devi valutare quando consentire la navigazione stessa, in considerazione delle condizioni atmosferiche e del livello dell'acqua.
Nel corso dell'anno le portate medie del Po (a Pontelagoscuro) sono di circa 34 milioni di metri cubi al giorno in regime di magra, 130 milioni di metri cubi al giorno in regime normale con un'oscillazione del 10% e 840 milioni di metri cubi al giorno in regime di piena (fonte deltadelpo.net).

Durante un periodo di alcuni giorni di piogge intense, dalle rilevazioni registrate risulta che:

- *nei primi due giorni dall'inizio delle misurazioni il valore della portata dell'acqua si è alzato dal valore di regime normale di 130 milioni di metri cubi al giorno fino al valore massimo di 950 milioni di metri cubi al giorno;*
- *nei giorni successivi la portata si è ridotta, tornando verso il valore di regime normale, inizialmente più velocemente e poi più lentamente.*

1)

Indicando con t il tempo, misurato in giorni, fissa un adeguato sistema di riferimento cartesiano in cui rappresentare il grafico dell'andamento della portata. Verifica se una delle seguenti funzioni può essere usata come modello per descrivere tale andamento, tenendo conto dei valori rilevati e del punto di massimo, giustificando con opportune argomentazioni sia la scelta che l'esclusione.

$$f(t) = a \cdot cos(bt) + c$$

$$g(t) = a \cdot e^{-\frac{t^2}{b}} + c$$

$$h(t) = a \cdot t \cdot e^{1-bt} + c$$

$$a, b, c \in \mathcal{R}$$

La funzione $f(t) = a \cdot cos(bt) + c$ non può essere usata come modello, poiché è una funzione sinusoidale, mentre dalle informazioni date si ipotizza che per t che tende a più infinito la funzione deve tendere al valore di regime, quindi deve avere un asintoto orizzontale (precisamente $y = 130\ , in\ milioni\ di\ metri\ cubi$).

Analizziamo la seconda funzione, $y = g(t) = a \cdot e^{-\frac{t^2}{b}} + c$. Dalle informazioni date si ha che:

$se\ t = 0, y = a + c = 130;\ se\ t = 2,\ y = a \cdot e^{-\frac{4}{b}} + c = 950$

$se\ t \to +\infty, y \to 130, quindi\ b > 0\ e\ c = 130$; da $a + c = 130$ si avrebbe quindi a=0 e da $a \cdot e^{-\frac{4}{b}} + c = 950$ si avrebbe c=950 che contraddice c=130. La funzione g(t) non può essere usata come modello.

Analizziamo la terza funzione: $y = h(t) = a \cdot t \cdot e^{1-bt} + c$

$se\ t = 0, y = c = 130;\ se\ t = 2,\ y = 2a \cdot e^{1-2b} + c = 950, da\ cui: 2a \cdot e^{1-2b} = 820$

$se\ t \to +\infty, y \to 130, quindi\ b > 0\ e\ c = 130$

Valutiamo la derivata prima:

$h'(t) = a \cdot e^{1-bt} + at(-b \cdot e^{1-bt})$

Poiché per t=2 si ha un massimo, deve essere $h'(2) = 0$, quindi:

$a \cdot e^{1-2t} - 2ab \cdot e^{1-2t} = 0,\ \ a - 2ab = 0, \qquad ed\ escludendo\ a = 0\ si\ ha\ b = \dfrac{1}{2}$

Da $2a \cdot e^{1-2b} = 820$ si ricava: $2a = 820, da\ cui\ \ a = 410.$

La funzione richiesta è quindi:

$y = h(t) = 410\, t \cdot e^{1-\frac{1}{2}t} + 130 = 410e \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{2}t} + 130$

2)

Individuata la funzione, determina i parametri in modo che siano verificate le condizioni sopra descritte per la portata e tracciane il grafico.

Abbiamo già individuato nel punto precedente la funzione:

$\boldsymbol{y = h(t) = 410e \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{2}t} + 130}$, $t \geq 0$ in giorni, y in milioni di metri cubi.

Abbiamo già notato che se t=0 y=130 e che $se\ t \to +\infty, y \to 130.$

Studiamo la **derivata prima**:

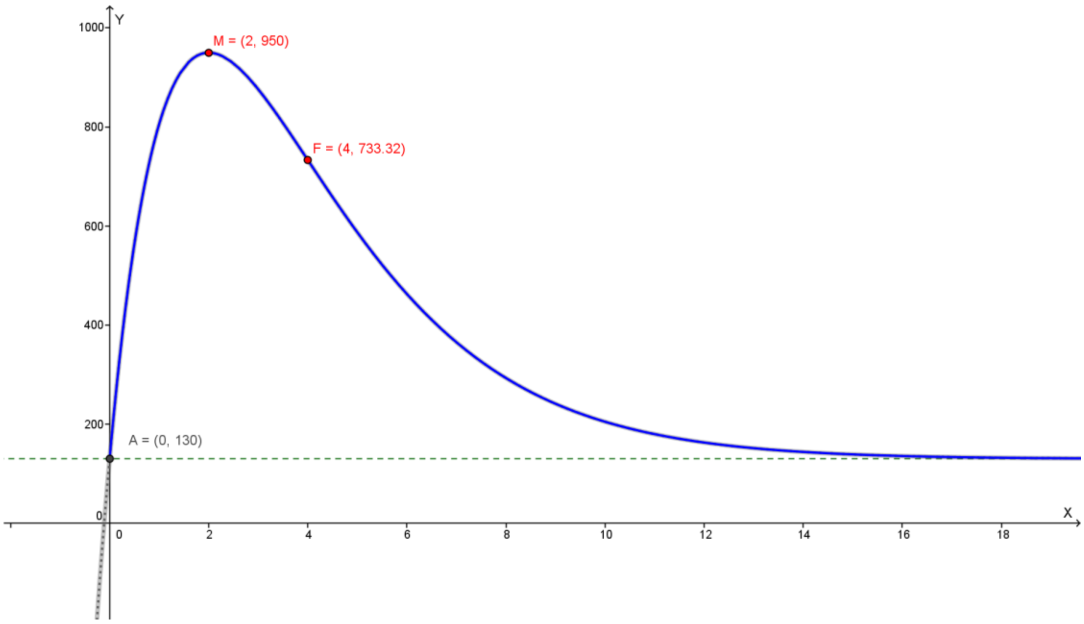
$g'(t) = 410e \cdot e^{-\frac{1}{2}t} - 205e \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{2}t} = 205e \cdot\ e^{-\frac{1}{2}t}(2 - t) \geq 0\ \ se\ t \leq 2$

Quindi la funzione è crescente se $0 \leq t < 2$ e decrescente se $t > 2$; t=2 è punto di massimo relativo (e assoluto) con ordinata g(2)=950.

Studiamo la **derivata seconda:**

$g''(t) = \frac{205}{2} \cdot e \cdot e^{-\frac{t}{2}}(-4+t) \geq 0 \;\; se \;\; t \geq 4$. Quindi il grafico volge la concavità verso l'alto se $t > 4$ e verso il basso se $0 < t < 4$; t=4 è punto di flesso con ordinata $g(4) = \dfrac{1640}{e} + 130 \cong 733$.

Il grafico della funzione è il seguente.



3)

Studia la variazione della portata nel tempo e valuta dopo quanti giorni tale variazione raggiunge il suo minimo. Inoltre, dovendo prevedere quando autorizzare la ripresa della navigazione in condizioni di sicurezza, valuta, analiticamente o per via grafica, dopo quanti giorni la portata rientra nel limite di oscillazione del valore di regime normale.

La variazione della portata nel tempo altro non è che la derivata della g(t).
Il grafico della funzione

$$y = \frac{dg}{dt} = g'(t) = 205e \cdot e^{-\frac{1}{2}t}(2-t)$$

può essere dedotto dal grafico di $y = g(t)$.

Per t=0 si ha $g'(0) = 410e$
Se $t \to +\infty$, $g'(t) \to 0^-$ come si osserva seguendo il coefficiente angolare della tangente

al grafico di g(t).

$g'(t) = 0 \ \ se \ \ t = 2 \,; \quad g'(t) > 0 \ \ se \ 0 < t < 2 \ \ (dove\ il\ grafico\ di\ g\ cresce);$

$g'(t) < 0 \ \ se\ t > 2 \ \ (dove\ il\ grafico\ di\ g\ decresce).$

$g'(t) \ \ cresce\ dove\ la\ sua\ derivata\ è\ positiva\ , quindi\ g''(t) > 0 : t > 4$

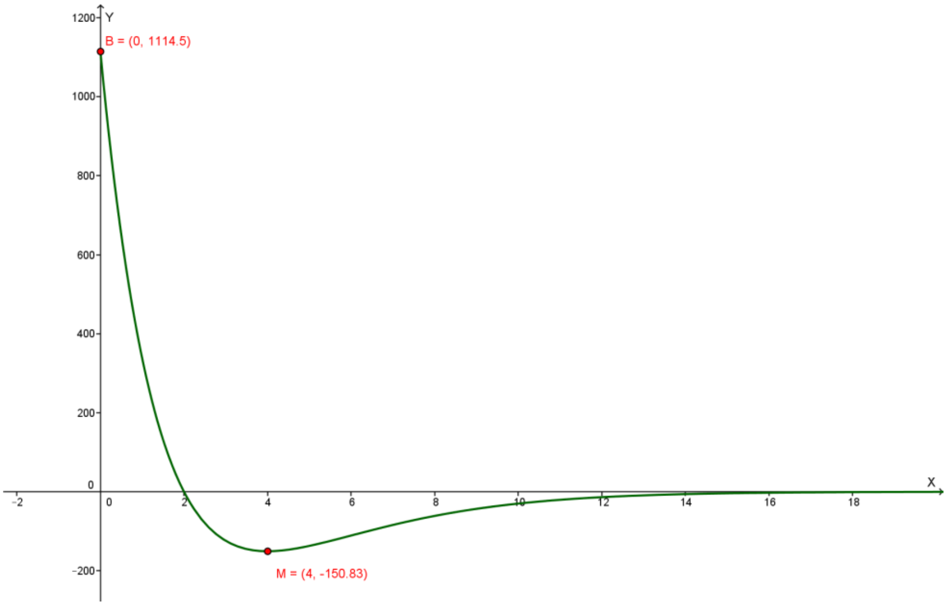
$g'(t) \ \ decresce\ dove\ la\ sua\ derivata\ è\ negativa, \qquad quindi\ g''(t) < 0 : 0 < t < 4$

La g'(t) ha quindi un minimo relativo (ed anche assoluto) per t=4, con valore

$$g'(4) = -410\, e^{-1} = -\frac{410}{e} \cong -151$$

Dopo 4 giorni la variazione della portata nel tempo raggiunge il suo valore minimo.

Il grafico della variazione in oggetto è il seguente:



Dobbiamo ora calcolare dopo quanti giorni la portata rientra nel limite di oscillazione del valore di regime normale; tale valore è pari a 130 milioni di metri cubi al giorno con un'oscillazione del 10%. Dobbiamo quindi stabilire dopo quanti giorni la portata è inferiore o uguale a 130+13=143 milioni di metri cubi al giorno.

$$h(t) = 410\, t \cdot e^{1-\frac{1}{2}t} + 130 \leq 143\,;$$

Se consideriamo come valore di regime normale 143, dobbiamo cercare le ascisse a e b delle intersezioni tra la curva e la retta y=143.

a è un valore compreso fra 0 e 2, b un valore compreso fra 14 e 15 (come vedremo).

Essendo $h(t) = 410\, t \cdot e^{1-\frac{1}{2}t} + 130$ otteniamo:

$h(1) = 410 \cdot e^{0.5} + 130 \cong 806 > 143$
$h(0.5) = 210 \cdot e^{0.75} + 130 \cong 575 > 143$
$h(0.2) = 410 \cdot 0.2 \cdot e^{0.9} + 130 \cong 367 > 143$
$h(0.1) = 410 \cdot 0.1 \cdot e^{0.95} + 130 \cong 249 > 143$
$h(0.05) = 410 \cdot 0.05 \cdot e^{1-0.5 \cdot 0.05} + 130 \cong 189 > 143$
$h(0.03) = 410 \cdot 0.03 \cdot e^{1-0.5 \cdot 0.03} + 130 \cong 165 > 143$
$h(0.02) = 410 \cdot 0.02 \cdot e^{1-0.5 \cdot 0.02} + 130 \cong 153 > 143$
$h(0.01) = 410 \cdot 0.01 \cdot e^{1-0.5 \cdot 0.01} + 130 \cong 141 < 143$

Quindi a è compreso fra 0.01 e 0.02: possiamo approssimarlo con 0.

b un valore compreso fra 14 e 15; infatti:

$h(14) = 410 \cdot 14 \cdot (e^{1-0.5 \cdot 14}) + 130 \cong 144 > 143$
$h(14.1) = 410 \cdot 14.1 \cdot (e^{1-0.5 \cdot 14.1}) + 130 \cong 143.6 > 143$
$h(14.2) = 410 \cdot 14.2 \cdot (e^{1-0.5 \cdot 14.2}) + 130 \cong 143.06 > 143$
$h(14.3) = 410 \cdot 14.3 \cdot (e^{1-0.5 \cdot 14.3}) + 130 \cong 142.5 < 143$

Quindi b è compreso fra 14.2 e 14.3: possiamo dire che superati i 14 giorni (quindi dopo 15 giorni) siamo rientrati nei limiti della normalità.
Quindi dopo 15 giorni la portata rientra nel limite di oscillazione del valore di regime normale (è inferiore a 143 milioni di metri cubi al giorno).

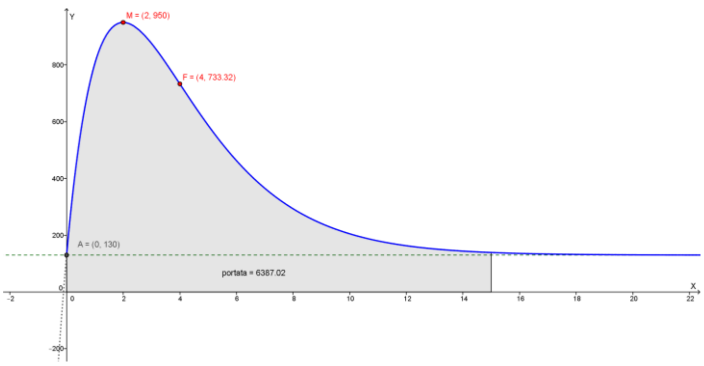
4)

Nel tempo trascorso tra l'inizio del fenomeno e il rientro nei limiti normali, qual è il volume di acqua che ha superato il valore di regime normale?

Calcoliamo il volume d'acqua che è fluito nei primi 15 giorni.
Ricordiamo che la portata è il rapporto fra il volume ed il tempo, quindi:

$$g = \frac{dV}{dt}\ ,\quad da\ cui\ \ dV = g\ dt, \qquad quindi:$$

$$V = \int_0^{15} g(t)dt = \int_0^{15} \left(410\, t \cdot e^{1-\frac{1}{2}t} + 130\right) dt$$



Integrando per parti risulta:

$$\int t \cdot e^{1-\frac{1}{2}t}\,dt = -2(t+2) \cdot e^{1-\frac{1}{2}t} + k$$

Quindi:

$$\int_0^{15} \left(410\,t \cdot e^{1-\frac{1}{2}t} + 130\right) dt = \left[-820(t+2)e^{1-\frac{1}{2}t} + 130t\right]_0^{15} \cong 6387$$

Considerando come valore di regime normale 143 (in 15 giorni $143 \cdot 15 = 2145$), il volume di acqua che ha superato il valore di regime normale è pari a $6387 - 2145 = 4242$ milioni di metri cubi.

Con la collaborazione di Angela Santamaria