Sessione ordinaria 2018
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

X02C – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzo: IB72 – SCIENTIFICO COMUNICAZIONE OPZIONE SPORTIVA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Consideriamo la funzione $f_k : \Re \to \Re$ così definita:

$$f_k(x) = -x^3 + kx + 9$$

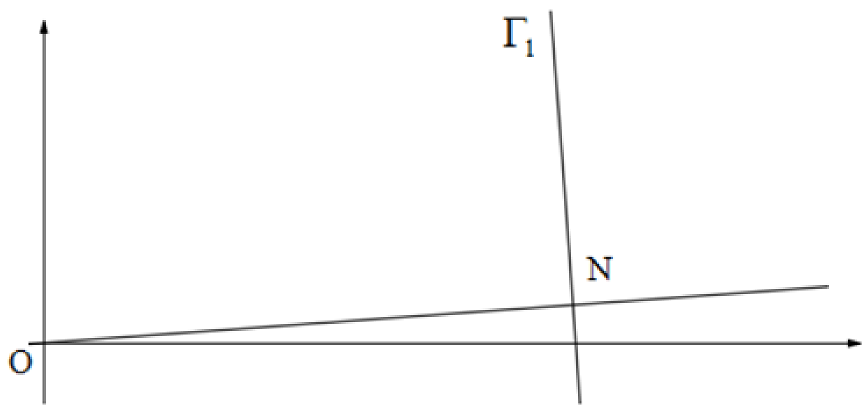
con $k \in Z$.

1. Detto Γ_k il grafico della funzione, verifica che per qualsiasi valore del parametro k la retta r_k , tangente a Γ_k nel punto di ascissa 0 e la retta s_k , tangente a Γ_k nel punto di ascissa 1, si incontrano in un punto *M* di ascissa $\frac{2}{3}$.

2. Dopo aver verificato che $k = 1$ è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto *M* è minore di 10, studia l'andamento della funzione $f_1(x)$, determinandone i punti stazionari e di flesso e tracciandone il grafico.

3. Detto *T* il triangolo delimitato dalle rette r_1, s_1 e dall'asse delle ascisse, determina la probabilità che, preso a caso un punto $P(x_p, y_p)$ all'interno di *T*, questo si trovi al di sopra di Γ_1 (cioè che si abbia $y_p > f_1(x)$ per tale punto *P*).

4. Nella figura è evidenziato un punto $N \in \Gamma_1$ e un tratto del grafico Γ_1 . La retta normale a Γ_1 in N (vale a dire la perpendicolare alla retta tangente a Γ_1 in quel punto) passa per l'origine degli assi *O*. Il grafico Γ_1 possiede tre punti con questa proprietà. Dimostra, più in generale, che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado $n > 0$ non può possedere più di $2n-1$ punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.



Sessione ordinaria 2018
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

PROBLEMA 2

Siano $f : \Re \rightarrow Z$ e $g : \Re \rightarrow \Re$ rispettivamente le funzioni *parte intera* e *parte frazionaria* (o *mantissa*) di un numero $x \in \Re$. Tali funzioni sono così definite:

$$f(x) = \max\{m \in Z \mid m \leq x\} \quad \text{e} \quad g(x) = x - f(x)$$

Pertanto, ad esempio, $f(\pi) = 3$, $g(4{,}79) = 0{,}79$.

1. A partire dalle definizioni delle funzioni *f* e *g*, mostra che per ogni $x \in \Re$ si ha $0 \leq g(x) < 1$. Disegna i grafici delle funzioni *f* e *g* determinando esplicitamente i loro punti di discontinuità e, eventualmente, i relativi salti.
2. Dopo aver verificato che la funzione *g* è periodica di periodo 1, calcola la media di *g* nell'intervallo [0, n] qualsiasi sia $n \in N, n > 0$. Calcola inoltre la media di *g* nell'intervallo $\left[0, n + \frac{1}{2}\right]$, e determina il limite a cui tale media tende per $n \rightarrow \infty$.
3. Calcola il volume del solido ottenuto dalla rotazione di $\frac{\pi}{6}$ radianti intorno all'asse *x* della regione di piano delimitata dai grafici di *f* e *g* nell'intervallo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.
4. Stabilisci per quali valori dei parametri reali *a*, *b*, *c*, *d* la funzione $h : \Re \rightarrow \Re$ definita dalla legge:

   $$h(x) = a + b \cdot sen(cx + d)$$

   verifica le seguenti condizioni[1]

   $$\min g = \min h, \qquad \sup g = \max h, \qquad 2h'' + 2h - 1 = 0$$

   Quante sono le funzioni siffatte?

[1] min *g* = minimo della funzione *g*, sup *g* = estremo superiore della funzione *g*, max *h* = massimo della funzione *h*

QUESTIONARIO

1. Dimostrare che il volume di un cilindro inscritto in un cono è minore della metà del volume del cono.

2. Si dispone di due dadi uguali non bilanciati a forma di tetraedro regolare con le facce numerate da 1 a 4. Lanciando ciascuno dei due dadi, la probabilità che esca 1 è il doppio della probabilità che esca 2, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 3, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 4. Se si lanciano i due dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che escano due numeri uguali tra loro?

3. Determinare i valori di k tali che la retta di equazione $y = -4x + k$ sia tangente alla curva di equazione $y = x^3 - 4x^2 + 5$.

4. Considerata la funzione $f(x) = \dfrac{3x - e^{sen\, x}}{5 + e^{-x} - \cos x}$, determinare, se esistono, i valori di $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, giustificando adeguatamente le risposte fornite.

5. Con una staccionata lunga 2 metri si vuole recintare una superficie avente la forma di un rettangolo sormontato da una semicirconferenza, come nel disegno:

   Determinare le dimensioni dei lati del rettangolo che consentono di recintare la superficie di area massima.

6. Determinare a in modo che

$$\int_a^{a+1} (3x^2 + 3)\, dx$$

   sia uguale a 10.

7. In un gioco a due giocatori, ogni partita vinta frutta 1 punto e vince chi per primo raggiunge 10 punti. Due giocatori che in ciascuna partita hanno la stessa probabilità di vincere si sfidano. Qual è la probabilità che uno dei due giocatori vinca in un numero di partite minore o uguale a 12?

8. Determinare quali sono i valori del parametro $k \in \Re$ per cui la funzione $y(x) = 2e^{kx+2}$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 2y' - 3y = 0$.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

9. Trovare l'area *R* della regione di spazio racchiusa dalla curva

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad per\ 4 \le x \le 9$$

Sapendo inoltre che la retta di equazione $x = k$ divide *R* in due figure di egual area, determinare il valore di *k*.

10. Verificare che, qualunque siano le costanti reali φ e k, la funzione $y = ke^{-x}sen(x+\varphi)$ è soluzione dell'equazione differenziale $y''+2y'+2y=0$. Trovare φ e k tali che questa funzione abbia un punto di massimo di coordinate (0,1) .

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 350 Art. 18 comma 8).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.