LICEO SCIENTIFICO SESSIONE STRAORDINARIA 2018 - PROBLEMA 2

Consideriamo la funzione $f: R \to R$, *così definita:*

$$f(x) = ln(a \cdot e^{bx} + c)$$

al variare di a, b, c *parametri reali positivi.*

1)

Verifica che, comunque si scelgano i parametri, si ha:

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in R, \; f''(x) > 0 \quad \forall x \in R\ .$$

Calcoliamo le derivate della funzione:

$$f'(x) = \frac{ab \cdot e^{bx}}{a \cdot e^{bx} + c} > 0 \quad \forall x \in R \;\; perchè \;\; a, b, c \; sono \; positivi$$

$$f''(x) = \frac{ab^2 \cdot e^{bx}(a \cdot e^{bx} + c) - ab \cdot e^{bx}(ab \cdot e^{bx})}{(a \cdot e^{bx} + c)^2} = \frac{ab^2 \cdot e^{bx}(a \cdot e^{bx} + c - a \cdot e^{bx})}{(a \cdot e^{bx} + c)^2}$$
$$= \frac{ab^2 c \cdot e^{bx}}{(a \cdot e^{bx} + c)^2}$$

e risulta $f''(x) > 0 \;\; \forall x \in R$ perché a, b, c sono positivi.

2)

Verifica inoltre che, comunque si scelgano i parametri, la funzione f *ha un asintoto orizzontale, per* $x \to -\infty$ *, e un asintoto obliquo, per* $x \to +\infty$ *; determina* $a, b, c,$ *in modo che l'asintoto orizzontale, per* $x \to -\infty$ *, sia la retta di equazione* $y = 0$ *e l'asintoto obliquo, per* $x \to +\infty$ *, sia la retta di equazione* $y = x$ *.*

$\lim_{x \to -\infty}\left(ln(a \cdot e^{bx} + c)\right) = \ln(c)$: quindi f ha l'asintoto orizzontale $y = \ln(c)$, per $x \to -\infty$ ed è $y = 0 \;\text{se}\; c = 1.$

Verifichiamo ora che f ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ln(a\cdot e^{bx}+c)}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ln(a\cdot e^{bx})}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ln(a)+ln(e^{bx})}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ln(a)+bx}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{bx}{x}\right)=b=m$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}(ln(a\cdot e^{bx}+c)-bx)=\lim_{x\to+\infty}\left(ln\left(e^{bx}\left(a+\frac{c}{e^{bx}}\right)\right)-bx\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(e^{bx})+ln\left(a+\frac{c}{e^{bx}}\right)-bx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(bx+ln\left(a+\frac{c}{e^{bx}}\right)-bx\right)=\lim_{x\to+\infty}ln\left(a+\frac{c}{e^{bx}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(a)+ln\left(1+\frac{c}{a\cdot e^{bx}}\right)\right)=\ln(a)=q$$

Quindi la funzione, per $x\to+\infty$, ha l'asintoto obliquo $y=bx+\ln(a)$ che coincide con $y=x\ \ se\ \ b=1\ \ ed\ a=1$.

3)

Dimostra che ponendo $a=b=c=1$ *si ha:*

$$x<f(x)<e^x \quad \forall x\in R.$$

Con $a=b=c=1$ risulta: $f(x)=ln(e^x+1)$

Osserviamo che:

$ln(e^x+1)>\ln(e^x)=x, \qquad quindi \ \ f(x)>x$

Per verificare che $f(x)<e^x$ studiamo qualitativamente la funzione.

$\boldsymbol{y=f(x)=ln(e^x+1)}$

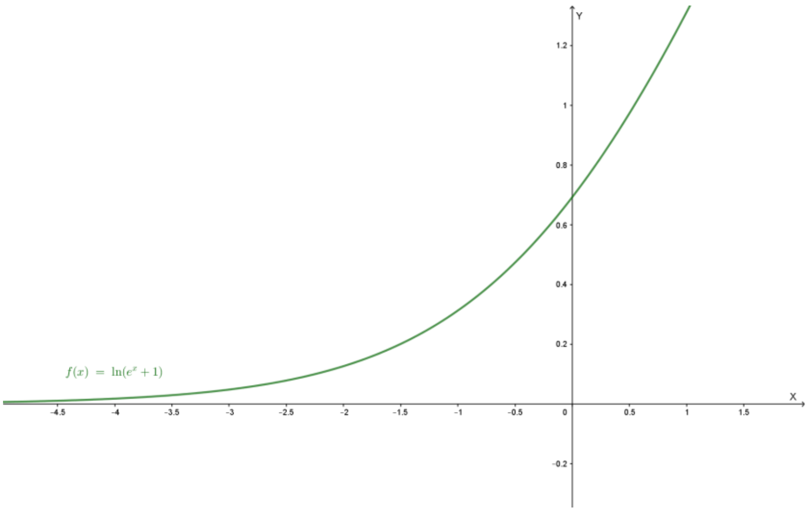
La funzione è definita su tutto R, per $x=0$ vale $ln(2)$, se $y=0\ e^x+1=1, mai$. La funzione è positiva quando $e^x+1>1, e^x>0: sempre$. Calcoliamo i limiti:

Se $x\to-\infty, f(x)\to 0^+\ : y=0\ asintoto\ al-\infty$ (come visto nel punto precedente)

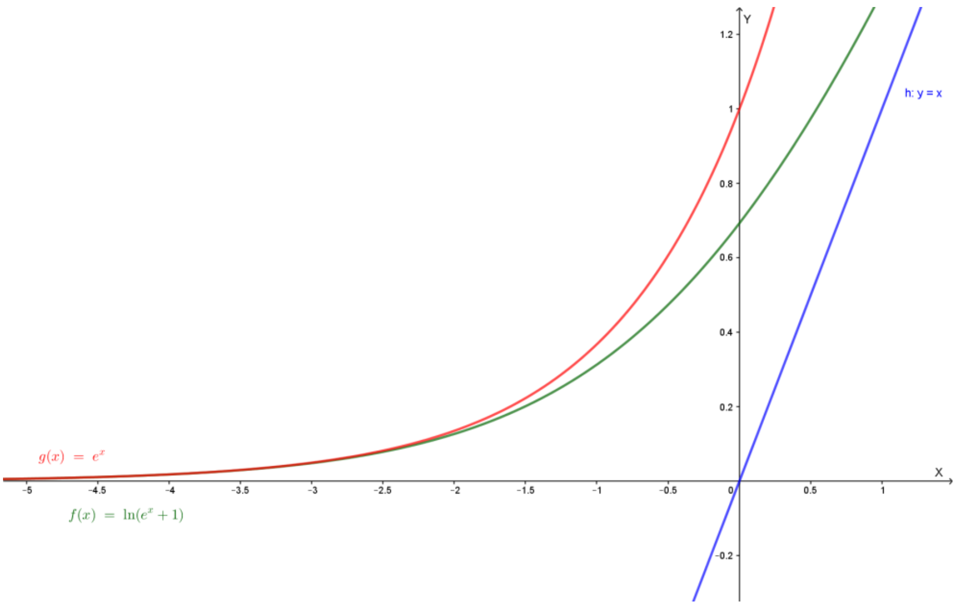
Se $x\to+\infty, f(x)\to+\infty$; possibile asintoto obliquo ($y=x$ come visto nel punto precedente).

Monotonia: $f'(x)>0\ \ \forall x\in R$, come dimostrato nel punto 1: funzione sempre crescente
Concavità: $f''(x)>0\ \ \forall x\in R$, come dimostrato nel punto 1: concavità sempre verso l'alto, nessun flesso.

Il grafico è quindi il seguente:



Rappresentando nello stesso piano cartesiano le tre funzioni $y = x,\ y = f(x)\ e\ y = e^x$ si può constatare che $x < f(x) < e^x \quad \forall x \in R$:



Osserviamo che $x = 0 \quad f(x) < e^x \quad in\ quanto\ \ln(2) < 1$ e che per $x \to -\infty \quad f(x)$ ed e^x sono infinitesimi dello stesso ordine, essendo:

$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(e^x+1)}{e^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$ (N.B. Siccome $e^x \to 0$, $\ln(e^x + 1) \sim e^x$).

4)

Verifica inoltre che ponendo $a = b = c = 1$ *e detta* A *l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione* $h(x) = f(-|x|)$ *e l'asse* x *del riferimento cartesiano, si ha*

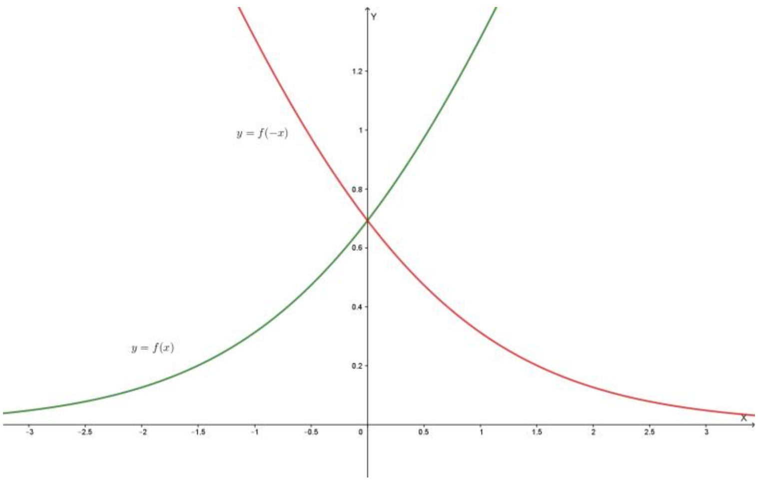
$$A < 2$$

Inoltre, a partire dalle caratteristiche del grafico della funzione $h(x)$*, determina un numero reale* S*, quanto più grande possibile, tale che*

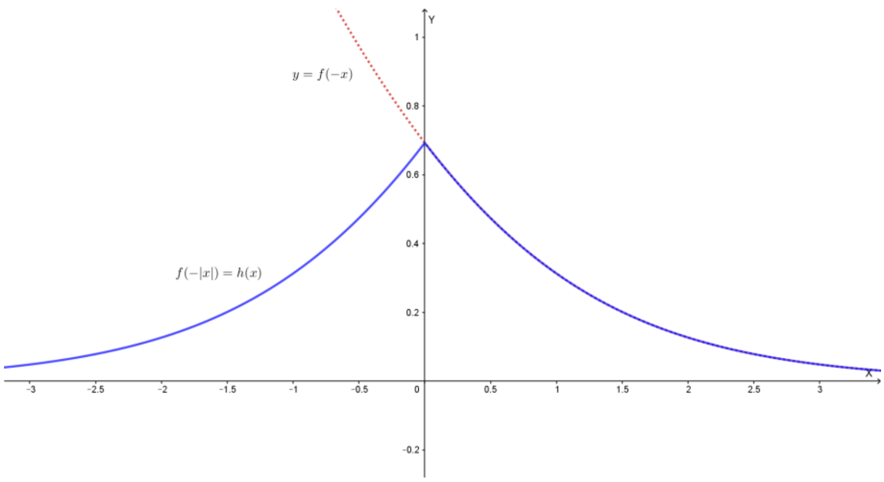
$$A > S$$

Il grafico di $h(x) = f(-|x|)$ si ottiene dal grafico di $f(x)$ con le seguenti trasformazioni:

1. $y = f(x) \rightarrow \; y = f(-x):$ $\quad simmetria\ rispetto\ all'asse\ delle\ y$



2. $y = f(-x) \; \rightarrow y = f(-|x|) = h(x)$: si conferma il grafico di $f(-x)$ che si trova a destra dell'asse y e lo si ribalta a sinistra:



Per dimostrare che $A < 2$ è sufficiente dimostrare che:

$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx < 1$; ma ricordiamo che $f(x) < e^x$, quindi $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx < \int_{-\infty}^{0} e^x dx$

Ma risulta:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{k\to-\infty} \int_{k}^{0} e^x dx = \lim_{k\to-\infty} [e^x]_k^0 = \lim_{k\to-\infty} (1 - e^k) = 1$$

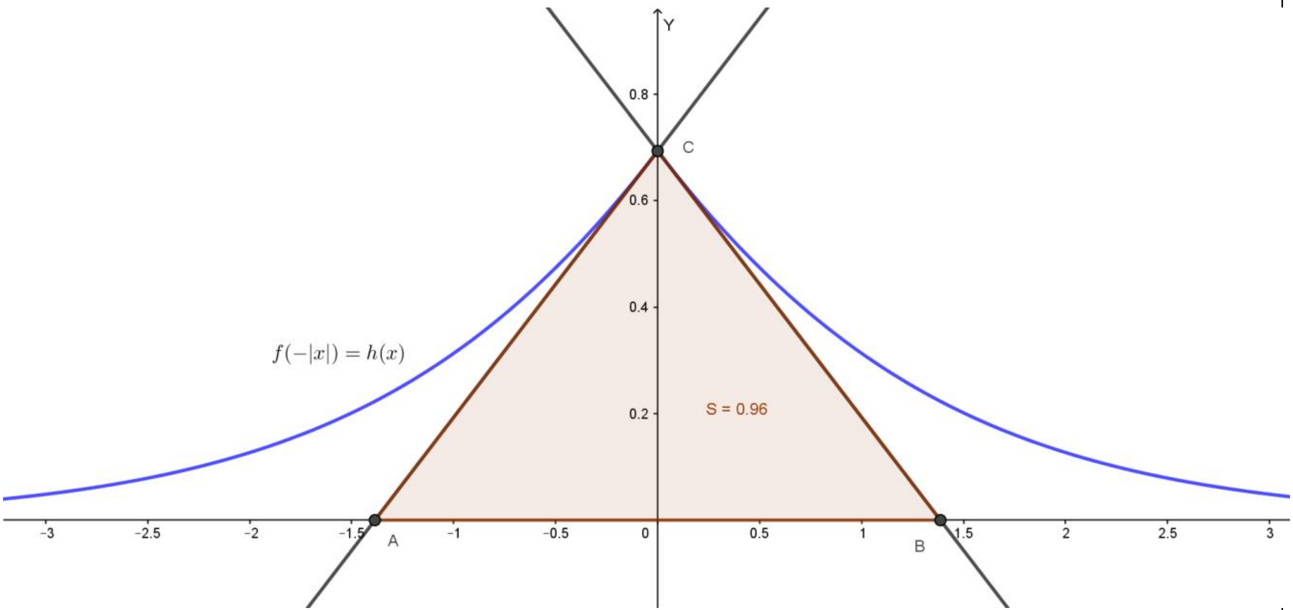
Quindi: $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx < 1$, da cui $A < 2$.

Cerchiamo infine un numero reale S (quanto più grande possibile) tale che $A > S$.
A tal fine determiniamo l'area S del triangolo ABC formato dalle tangenti (destra e sinistra) al grafico di h nel punto angoloso $C = (0; \ln(2))$.
Per $x < 0 \quad h(x) = ln(e^x + 1)$ ed è:

$h'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}, \quad h'_-(0) = \dfrac{1}{2}$, $\quad semitangente\ sinistra\ in\ C$: $y - \ln(2) = \dfrac{1}{2}x,$

$x_A = -2\ln(2)$, $AB = 4\ln(2),$

$S = area(ABC) = 2\ln(2)\ln(2) = 2\ln^2(2) \cong 0.96$



Quindi numero reale S (quanto più grande possibile) tale che $A > S$ è $S = 2\ln^2(2) \cong 0.96$

Con la collaborazione di Angela Santamaria