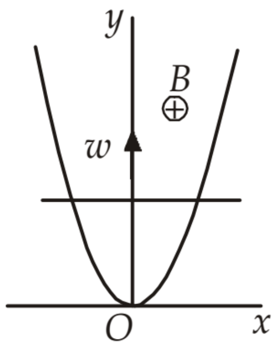
## SECONDA PROVA SCRITTA – ESEMPIO MINISTERIALE DICEMBRE 2018

### Tema di MATEMATICA – FISICA

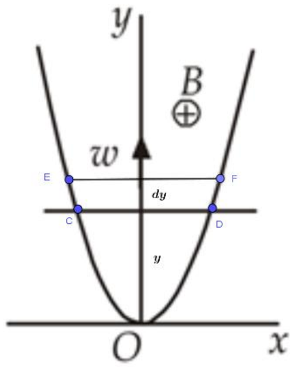
### QUESTIONARIO

### Q 1

Una spira a forma di parabola di equazione $y = ax^2$ è immersa in un campo magnetico uniforme B perpendicolare al piano $xy$ della parabola. All'istante $t = 0$ una barretta inizia a traslare lungo la parabola partendo dal suo vertice con accelerazione costante come indicato in figura. Determinare la forza elettromotrice indotta sulla spira in funzione della $y$.




Indichiamo con y la distanza dall'origine della barretta e con dy lo spazio percorso dalla barretta nel tempo dt; l'ascissa di D passa da x a x+dx. L barretta passa dalla lunghezza CD alla lunghezza EF, e risulta ($dS = area\ spazzata\ dalla\ barretta$):




$CD = 2x\ ,\ dS \cong CD \cdot dy = 2x\ dy$ . In modo più rigoroso:

$EF = 2(x + dx), \qquad dy = 2axdx$

Calcoliamo le aree $S_1$ $ed$ $S_2$ dei segmenti parabolici OCD e OEF:

$$S_1 = \frac{2}{3}CDy = \frac{4}{3}xy\ ,\ S_2 = \frac{4}{3}(x + dx)(y + dy)$$

$$S_2 - S_1 = \frac{4}{3}(x + dx)(y + dy) - \frac{4}{3}xy =$$

$$= \frac{4}{3}(xdy + ydx + dxdy) \cong \frac{4}{3}(xdy + ydx) =$$

$$= \frac{4}{3}\left(xdy + y\frac{dy}{2ax}\right) = \frac{4}{3}\left(xdy + ax^2\frac{dy}{2ax}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}xdy\right) =$$

$$= 2xdy = dS$$

$(N.B.:\ dxdy\ \text{è}\ trascurabile)$ . Quindi (detta $v = \sqrt{2\omega y}$ la velocità della barretta in funzione dell'accelerazione e dello spazio percorso):

$$fem = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{B(ds)}{dt} = -\frac{B(2xdy)}{dt} = -2Bxv = -2B\sqrt{\frac{y}{a}}\sqrt{2\omega y} = -2By\left(\sqrt{\frac{2\omega}{a}}\right)$$

La forza elettromotrice indotta sulla spira in funzione di y è:

$$fem = -2By\left(\sqrt{\frac{2\omega}{a}}\right)$$

## Q 2

La posizione di una particella varia con il tempo secondo l'equazione:

$x = \alpha t(1 - \beta t)$, dove $\alpha$ e $\beta$ sono due costanti, con $\beta > 0$.

Determina:

a) la velocità e l'accelerazione della particella in funzione del tempo;

b) l'intervallo di tempo necessario alla particella, che parte dall'origine, per ritornare nell'origine e lo spazio percorso in questo intervallo di tempo.

**a)**

$v = x'(t) = \alpha(1 - \beta t) + at(-\beta) = \alpha - 2\alpha\beta t = v(t)$

$a = x''(t) = -2\alpha\beta = a(t)$

**b)**

Risulta $x = 0 \ se \ t = 0 \ oppure \ t = \frac{1}{\beta}$.

Quindi il tempo necessario per ritornare nell'origine, partendo dall'origine è $t = \frac{1}{\beta}$, che è il doppio del tempo $t = 1/2\beta$ in cui la velocità si annulla per poi tornare indietro.

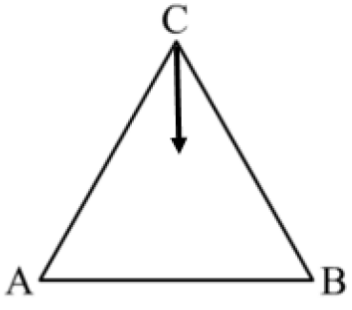
Lo spazio percorso in tale intervallo di tempo è: $2\left[x\left(\frac{1}{2\beta}\right)\right] = 2\left[\alpha \cdot \frac{1}{2\beta}\left(1 - \beta \cdot \frac{1}{2\beta}\right)\right] = \frac{\alpha}{2\beta}$

## Q 3

Tre cariche puntiformi di valore $q$ sono poste ai vertici del triangolo equilatero $ABC$, i cui lati misurano 1m.

a) Determina l'energia potenziale del sistema.

b) La carica collocata in C viene spostata verso il segmento $AB$ lungo la perpendicolare ad $AB$; traccia il grafico dell'andamento dell'energia potenziale del sistema in funzione della distanza della carica dal segmento $AB$.



**a)**

L'energia potenziale di una carica q posta in un punto P a distanza R da una seconda carica Q è data da:

$$U_P = k\frac{Qq}{R} \qquad (con\ k = 9 \cdot 10^9\ N \cdot \frac{m^2}{C^2}\ ,\ \ costante\ di\ Coulomb)$$

Ad ogni coppia di cariche q e Q (poste in due punti A e B a distanza R) corrisponde quindi un'energia potenziale elettrica data da: $U = k\frac{Qq}{R}$ .

Quindi, tenendo presente che le cariche in A e B (distanti 1 m da C) sono uguali a q:

$$U_{AB} = U_{AC} = U_{BC} = k\frac{qq}{1} = kq^2 :$$

$$U(sistema) = U_{AB} + U_{AC} + U_{BC} = 3kq^2$$

**b)**

Detta $x = CH$ la distanza di C quando la carica viene spostata verso il segmento AB lungo la perpendicolare ad AB, risulta: $CA = CB = \sqrt{\frac{1}{4} + x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4x^2}$

Quindi:

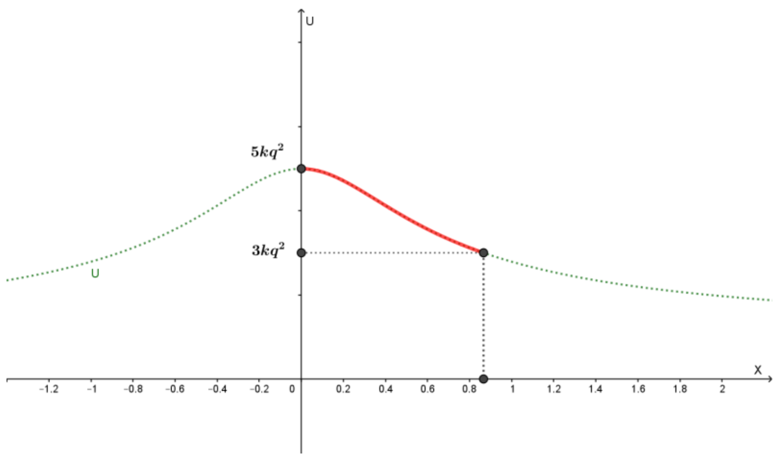
$U_{AC} = U_{BC} = \left(k\frac{qq}{\frac{1}{2}\sqrt{1+4x^2}}\right) = \frac{2kq^2}{\sqrt{1+4x^2}}$ ; $U_{AB} = \frac{kq^2}{1}$ . Pertanto:

$$U(sistema) = U_{CA} + U_{CB} + U_{AB} = \frac{4kq^2}{\sqrt{1+4x^2}} + kq^2; quindi:$$

$$U(x) = kq^2\left(1 + \frac{4}{\sqrt{1+4x^2}}\right), \qquad con\ \ 0 \le x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Questa funzione è sempre positiva, vale $5kq^2$ se $x = 0$, è sempre decrescente (perché $\sqrt{1+4x^2}$ cresce al crescere di x), e vale $3kq^2$ se $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Il grafico di U(x) è quindi del tipo:



## Q 4

Un punto materiale si muove nel piano $xy$ secondo la legge oraria:

$$x = a \cdot sen(\omega t), y = a(1 - cos(\omega t)),$$

con $a$ e $\omega$ costanti positive. Determina la distanza del punto dall'origine al tempo $t = \tau$ e le direzioni dei vettori velocità e accelerazione all'istante $t = 0$.

Se $t = \tau$ il punto P in moto ha coordinate $P = (a\, sen(\omega\tau);\ a(1 - cos(\omega\tau))$ . Quindi:

$$PO = \sqrt{(a\, sen(\omega\tau))^2 + (a(1 - cos(\omega\tau))^2} = \sqrt{2a^2 - 2a^2 cos(\omega\tau)} =$$

$$= a\sqrt{2 - 2cos(\omega\tau)} = 2a\, sen\frac{\omega\tau}{2} = PO$$

Determiniamo la velocità:

$$\begin{cases} v_x = x'(t) = a\omega cos(\omega t) \\ v_y = y'(t) = a\omega sen(\omega t) \end{cases} ; \quad v(0) = (a\omega; 0):\ direzione\ del\ semiasse\ x\ positivo$$

Determiniamo l'accelerazione:

$$\begin{cases} a_x = x''(t) = -a\omega^2 sen(\omega t) \\ v_y = y''(t) = a\omega^2 cos(\omega t) \end{cases} ; \quad a(0) = (0; a\omega^2):\ direzione\ del\ semiasse\ y\ positivo$$

N.B. La traiettoria del moto di P si ottiene eliminando il parametro t dalle equazioni parametriche del moto. Risulta:

$$\frac{x}{a} = sen(\omega t), \qquad 1 - \frac{y}{a} = cos(\omega t): \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a} - 1\right)^2 = 1 ,$$

$x^2 + (y - a)^2 = a^2$ : circonferenza con centro in C=(0; a) e raggio R=a.

## Q 5

Un elettrone si muove, partendo da fermo, in un campo elettrico uniforme di intensità $E = 10\, {}^{kV}/_{cm}$. Descrivi il procedimento che adotteresti per determinare l'istante in cui l'energia cinetica dell'elettrone sarà uguale alla sua energia a riposo.

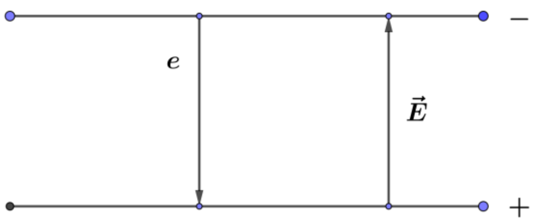
$$Energia\ a\ riposo = E_0 = m_0 c^2; \quad Energia\ cinetica\ relativistica = (\gamma - 1) m_0 c^2$$

dove $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ . Per il principio di conservazione dell'energia relativistica abbiamo:

$$m_0c^2 = (\gamma - 1)m_0c^2\,, \quad se \quad \gamma = 2\,, \qquad quindi:\ 2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ , \qquad 2 = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}\ ,$$

$$2\sqrt{c^2 - v^2} = c\,,\ \ 4(c^2 - v^2) = c^2\,,\ \ 4v^2 = 3c^2\ , \qquad v = c\sqrt{\frac{3}{4}}\ ,\ \ v = \frac{\sqrt{3}}{2}\,c$$

Per determinare l'stante in cui l'energia cinetica dell'elettrone è uguale alla sua energia a riposo applichiamo la seconda legge della dinamica (tenendo presente che la forza agente è $F = eE$ e ipotizzando che l'elettrone si muova, partendo da fermo, nella direzione del campo E ed in verso opposto):




$$F = ma\,, \qquad eE = ma = (m_0\gamma)a\,, \qquad a = \frac{eE}{m_0\gamma}\ ,\ \ v = at\ , \qquad t = \frac{v}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}c}{\frac{eE}{m_0\gamma}} = \frac{\sqrt{3}cm_0\gamma}{2eE} = t$$

Quindi (ricordiamo che $E = 10\,\frac{kV}{cm} = \frac{10^4 V}{10^{-2} m} = 10^6\ V/m$)

$$t = \frac{\sqrt{3}(3\cdot 10^8)(9.1\cdot 10^{-31})(2)}{2(1.6\cdot 10^{-19})(10^6)}\ s = \frac{3\sqrt{3}\cdot 9.1}{1.6}\cdot 10^{-10}\ s \cong 29.6\cdot 10^{-10}\ s = 3\cdot 10^{-9}\ s \cong t$$

## Q 6

Quanto tempo impiegherà un'onda sonora a percorrere la distanza $l$ tra i punti $A$ e $B$ se la temperatura dell'aria tra di essi varia linearmente da $T1$ a $T2$? Tieni presente che la velocità di propagazione nell'aria varia in funzione della temperatura secondo la legge:

$$v = a\sqrt{T}$$

dove $a$ è una costante.

Siccome T varia linearmente rispetto alla posizione x (poniamo $x = 0$ in A e $x = l$ in B), risulta:

$T = T_1 + bx,\ \ con\ \ 0 \le x \le l\ .\ \ Ma\ se\ T = T_2$ è $x = l,\ quindi:\ \ b = \frac{T_2 - T_1}{l}$, perciò:

$$T = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{l}\right)x$$

Essendo $v = a\sqrt{T}$ risulta: $\frac{dx}{dt} = a\sqrt{T_1 + \left(\frac{T_2-T_1}{l}\right)x}$ , $\frac{dx}{\sqrt{T_1+\left(\frac{T_2-T_1}{l}\right)x}} = adt$ e integrando:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{T_1 + \left(\frac{T_2-T_1}{l}\right)x}} = \int a\, dt\ ,\quad \frac{2l}{T_2-T_1}\int \frac{\left(\frac{T_2-T_1}{l}\right)dx}{2\left(\sqrt{T_1 + \left(\frac{T_2-T_1}{l}\right)x}\right)} = at + K\ ,$$

$$\frac{2l}{T_2-T_1}\left(\sqrt{T_1 + \left(\frac{T_2-T_1}{l}\right)x}\right) = at + k\ .\ Ma\ per\ t = 0\ è\ x = 0, \qquad quindi: \frac{2l\sqrt{T_1}}{T_2-T_1} = k$$

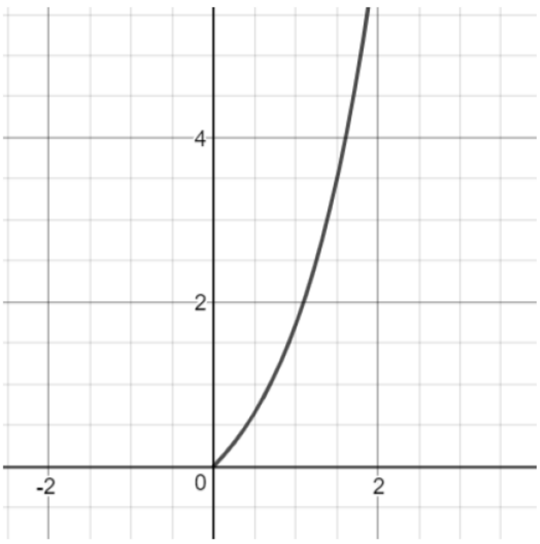
Perciò il tempo impiegato dall'onda a percorrere la distanza $l$ è tale che:

$$\frac{2l}{T_2-T_1}\left(\sqrt{T_1 + \left(\frac{T_2-T_1}{l}\right)l}\right) = at + \frac{2l\sqrt{T_1}}{T_2-T_1},\quad \frac{2l}{T_2-T_1}\sqrt{T_2} - \frac{2l\sqrt{T_1}}{T_2-T_1} = at\ , \qquad pertanto:$$

$$t = \frac{\frac{2l}{T_2-T_1}\left(\sqrt{T_2}-\sqrt{T_1}\right)}{a} = \frac{2l\left(\sqrt{T_2}-\sqrt{T_1}\right)}{a(T_2-T_1)} = \frac{2l}{a\left(\sqrt{T_2}+\sqrt{T_1}\right)} = t$$

## Q 7

Il grafico riportato nella figura seguente potrebbe rappresentare l'andamento della velocità con cui una carica puntiforme si allontana per repulsione elettrostatica da un'altra carica puntiforme, fissa, di eguale segno? Motiva la tua risposta.



Sia Q la carica fissa e q la carica che si allontana da Q (supponiamo che le cariche siano positive e che il mezzo sia il vuoto). Supponiamo poi che la carica Q sia fissa in O e che q si allontani nel verso positivo dell'asse x. La forza (repulsiva) esercitata da Q su q nella generica posizione x si ottiene da:

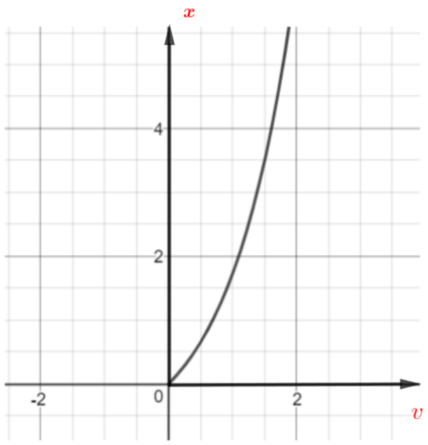
$$F = ma, \qquad \frac{KQq}{x^2} = ma \ , \ a = \frac{KQq}{mx^2} \ (*)$$

Supponendo che nella figura proposta la velocita sia l'ordinata e la distanza di q da Q sia l'ascissa, dal grafico deduciamo che per $x \to 2^-$ l'accelerazione (che corrispondente al coefficiente angolare della tangente al grafico della velocità) tende a $+\infty$ , mentre dalla relazione (*) si ha che l'accelerazione tende a $\frac{KQq}{4m}$ :

Il grafico NON può quindi rappresentare l'andamento della velocità di q (in funzione della distanza x dalla carica ferma Q).

**N.B.**

Se nella figura proposta consideriamo la velocità in ascissa e la distanza x di q da Q in ordinata, dal grafico deduciamo che se $x \to +\infty$ la velocità tende a 2 e ciò sarebbe possibile: a distanza infinita il moto tende ad essere uniforme.




## Q 8

Un punto si muove lungo l'asse x secondo la legge:

$$x = a \cdot sen^2\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$$

con a costante positiva. Determina:

a) l'ampiezza e il periodo di oscillazione;

b) l'istante t in cui il punto raggiunge per la prima volta la massima distanza dall'origine.

**a)**

La legge oraria (utilizzando la formula di bisezione del seno: $sen^2x = \frac{1-cos2x}{2}$ ) può essere riscritta nella seguente forma:

$$x = a\frac{1-cos\left(6t-\frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2}a\left(1-cos\left(6t-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}a(1-sen(6t) = -\frac{1}{2}a\cdot sen(6t)+\frac{1}{2}a$$

che rappresenta un moto periodico di ampiezza $A = \frac{1}{2}a$ e periodo $T = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} = T$ .

**b)**

La massima distanza dall'origine si ha quando è massimo $x = \frac{1}{2}a(1-sen(6t))$ , e ciò avviene quando $sen(6t) = -1$ , $6t = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \ (con\ k \in Z)$,

$t = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$ , $e\ per\ k = 0\ otteniamo\ t = \frac{\pi}{4}$.

Il punto raggiunge per la prima volta la massima distanza dall'origine in $t = \frac{\pi}{4}\ s \cong 0.79\ s$ .

*Con la collaborazione di Angela Santamaria e Stefano Scoleri*