SECONDA PROVA SCRITTA – ESEMPIO MINISTERIALE DICEMBRE 2018

Tema di MATEMATICA

PROBLEMA 2

(Il Problema è quasi uguale al Problema 2 della Simulazione del 10 dicembre 2015)

Il tuo liceo, nell'ambito dell'alternanza scuola lavoro, ha organizzato per gli studenti del quinto anno un'attività presso lo stabilimento ICE EXPRESS sito nella tua regione. All'arrivo siete stati divisi in vari gruppi. Il tuo, dopo aver visitato lo stabilimento e i laboratori, partecipa ad una riunione legata ai processi di produzione.

Un cliente ha richiesto una fornitura di blocchi di ghiaccio a forma di parallelepipedo a base quadrata di volume 10 dm^3*, che abbiano il minimo scambio termico con l'ambiente esterno, in modo da resistere più a lungo possibile prima di liquefarsi.*

Al tuo gruppo viene richiesto di determinare le caratteristiche geometriche dei blocchi da produrre, sapendo che gli scambi termici tra questi e l'ambiente avvengono attraverso la superficie dei blocchi stessi.

1) *Determina il valore del lato b della base quadrata che consente di minimizzare lo scambio termico e il corrispondente valore dell'altezza h, tenendo presente la necessità che il volume sia* $10\ dm^3$.

Indicata con h l'altezza del parallelepipedo, il suo volume è:

$$V = b^2h = 10\ dm^3 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{10}{b^2}$$

La superficie S del parallelepipedo è:

$$S = 2b^2 + 4(bh) = 2b^2 + 4b \cdot \frac{10}{b^2} = 2b^2 + \frac{40}{b} \qquad con\ b > 0$$

Posto per comodità S=y e b=x studiamo (anche se non richiesto) la funzione di equazione:

$$\boldsymbol{y = 2x^2 + \frac{40}{x}\ , \quad con\ x > 0}$$

Se $x \to 0^+ \quad y \to +\infty$; se $x \to +\infty \quad y \to +\infty$; non esiste asintoto obliquo poiché la funzione è un infinito del secondo ordine.

Segno: y>0 per ogni x del dominio (x>b).

Derivata prima:

$y' = 4x - \frac{40}{x^2} \geq 0 \quad se \quad x^3 \geq 10\,, \quad x \geq \sqrt[3]{10}$

La funzione è quindi crescente per $x > \sqrt[3]{10}$ e decrescente per $0 < x < \sqrt[3]{10}$.

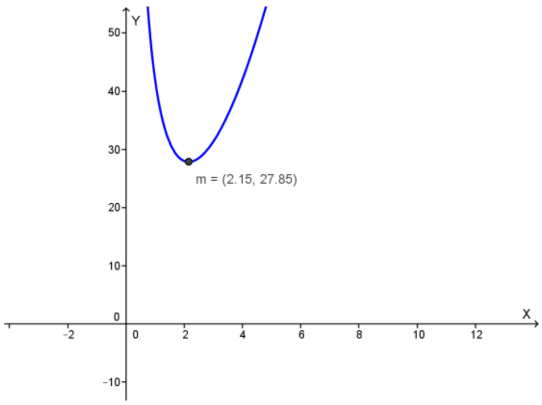
$x = \sqrt[3]{10} \cong 2.2$ è punto di minimo relativo (e assoluto), con valore:

$y = 2\sqrt[3]{100} + \frac{40}{\sqrt[3]{10}} \cong 27.8$.

Derivata seconda:

$y'' = 4 + \frac{80}{x^3} \geq 0 \quad per\ ogni\ x\ del\ dominio:$ la concavità è sempre rivolta verso l'alto.

Il grafico della funzione è quindi il seguente:



Determiniamo il valore di b che consente di minimizzare lo scambio termico e il corrispondente valore dell'altezza h.

Lo scambio termico è minimo quando è minima la superficie del parallelepipedo, quindi quando $b = \sqrt[3]{10} \cong 2.2\ dm$; in tal caso l'altezza h del parallelepipedo è:

$$h = \frac{10}{b^2} = \frac{10}{\sqrt[3]{100}} = \frac{10\sqrt[3]{10}}{10} = \sqrt[3]{10}\ dm \cong 2.2\ dm = b$$

Il minimo scambio termico si ha quindi quando il parallelepipedo è un cubo di spigolo $b = \sqrt[3]{10}$

Il blocco di ghiaccio al termine del processo produttivo si trova alla temperatura di -18°C. Esso viene posto su un nastro trasportatore che lo porta a un camion frigorifero, attraversando per due minuti un ambiente che viene mantenuto alla temperatura di 10°C; esso pertanto tende a riscaldarsi, con velocità progressivamente decrescente, in funzione della differenza di temperatura rispetto all'ambiente, e inizia a fondere se lungo il percorso raggiunge la temperatura di 0°C.

2) *Scegli, motivando la tua scelta, quale delle seguenti funzioni è più idonea per rappresentare il processo di riscaldamento prima della liquefazione (T_a = temperatura ambiente, T_g = temperatura iniziale del ghiaccio, $T(t)$ = temperatura del ghiaccio all'istante t, dove t è il tempo trascorso dall'inizio del riscaldamento, in minuti):*

$$T(t) = (T_g - T_a)e^{-kt}$$

$$T(t) = (T_a - T_g)(1 - e^{-kt}) + T_g$$

$$T(t) = (T_a - T_g)e^{-kt} - T_a$$

e determina il valore che deve avere il parametro K perché il blocco di ghiaccio non inizi a fondere durante il percorso verso il camion frigorifero.

Con i dati forniti le tre funzioni hanno le seguenti equazioni:

$$T(t) = -28\, e^{-kt}$$

$$T(t) = 28(1 - e^{-kt}) - 18 = 10 - 28\, e^{-kt}$$

$$T(t) = 28e^{-kt} - 10$$

Per t=0 deve essere T= - 18, quindi si scarta la prima equazione essendo T(0) = -28 e così pure la terza essendo T(0)= + 18.

La funzione richiesta è quindi la seconda (per la quale T(0)=-18):

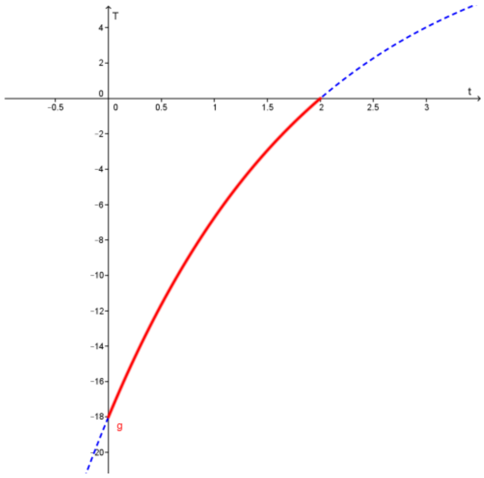
$$T(t) = 10 - 28\, e^{-kt}$$

Per determinare il valore di k dobbiamo imporre che per t=2 la temperatura non sia superiore a zero gradi:

$$T(2) = 10 - 28\, e^{-2k} \le 0\,, \quad e^{-2k} \ge \frac{5}{14} \quad , \quad -2k \ge ln\left(\frac{5}{14}\right)\,, \quad k \le -\frac{1}{2}\, ln\left(\frac{5}{14}\right) \cong 0.51$$

Possiamo quindi scegliere $k = -\frac{1}{2}\, ln\left(\frac{5}{14}\right)$, che è circa $k = \frac{1}{2}$.
Per tale valore di k la temperatura del blocco di ghiaccio raggiunge zero gradi alla fine del percorso sul nastro trasportatore.

Anche se non richiesto, indichiamo il grafico della temperatura: $T(t) = 10 - 28\, e^{-kt}$ che è approssimabile a $\boldsymbol{T(t) = 10 - 28\, e^{-\frac{1}{2}t}}$.



3) *Poiché il parametro K varia in funzione di diversi fattori produttivi, c'è un'incertezza del 10% sul suo effettivo valore. Ritieni che questo determini una incertezza del 10% anche sul valore della temperatura T del blocco di ghiaccio all'istante in cui raggiunge il camion frigorifero? Motiva la tua risposta, in modo qualitativo o quantitativo.*

Essendo $k = -\frac{1}{2}\, ln\left(\frac{5}{14}\right) \cong 0.5$, il suo 10% è circa 0.05 ($= \Delta k =$ errore assoluto di k).
Assumendo come valore effettivo di k=0.5, con l'incertezza del 10% esso varia tra 0.45 e 0.55.
Ricordiamo che, data una funzione y=f(x), all'incremento Δx di $x = x_0$ corrisponde un incremento Δf della funzione dato da: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ e tale incremento è approssimabile con $f'(x_0) \cdot \Delta x$ (differenziale della funzione relativo al punto x_0 ed all'incremento Δx. Quindi: $\Delta f \cong f'(x_0) \cdot \Delta x$.
Consideriamo T come funzione di k, fissato t=2: $T(k) = 10 - 28\, e^{-2k}$.
Nel nostro caso abbiamo: $T'(k) = 56\, e^{-2k}$, $T'(0.5) \cong 21,\ \Delta k = 0.05.$ Quindi:

$\Delta T \cong 21 \cdot 0.05 \cong 1.1$

Ad un incremento di 0.05 su k corrisponde un incremento di 1.1 su T. Quindi:

$T = (0.0 \pm 1.1)$℃

L'errore relativo di T è: $\frac{\Delta T}{T}$.

Essendo il valore di T=0, l'errore relativo non è definito, è indeterminato (tenderebbe a $+\infty$)

Osserviamo che:

Per k=0.45 si ha $T(0.45) = T(k - \Delta k) = 10 - 28\, e^{-0.45 \cdot 2} \cong -1.4$
Per k=0.55 si ha $T(0.55) = T(k + \Delta k) = 10 - 28\, e^{-0.55 \cdot 2} \cong 0.7$

E notiamo che $\Delta T \cong \frac{T(0.55) - T(0.45)}{2} \cong 1.0\ (equivalente\ a\ \ \Delta T \cong 21 \cdot 0.05 \cong 1.1)$
Assumendo come valore probabile di T la media tra T(0.45) e T(0.55), risulta:

$$\bar{T} = \frac{-1.4+0.7}{2} = -\frac{0.7}{2} = -0.35$$

Con tale valore di T abbiamo: $T = -0.35 \pm 1.1$, quindi l'errore relativo di T sarebbe:

$$\left|\frac{\Delta T}{\bar{T}}\right| = \left|\frac{1.1}{0.35}\right| \cong 3.14 = \frac{314}{100} = 314\ \% \quad !$$

Quindi ad un'incertezza del 10% sul valore di k NON corrisponde un'incertezza del 10% sul valore della temperatura T del blocco di ghiaccio all'istante in cui raggiunge il camion frigorifero.

L'azienda solitamente adopera, per contenere l'acqua necessaria a produrre un singolo blocco di ghiaccio, un recipiente cilindrico, con raggio della base eguale a 1.5 dm, e altezza eguale a 2 dm.

4) *sapendo che nel passaggio da acqua a ghiaccio il volume aumenta del 9,05%, stabilisci se il suddetto recipiente è in grado di contenere l'acqua necessaria a produrre il blocco richiesto e, in tal caso, a quale altezza dal fondo del recipiente arriverà l'acqua.*

Sappiamo che il volume del blocco di ghiaccio, che è un cubo di lato $b = \sqrt[3]{10}\ dm$, è:

$$V(blocco\ ghiaccio) = b^3 = 10\ dm^3$$
$$V(recipiente) = \pi R^2 h = \pi \cdot (1.5)^2 \cdot 2\ \ dm^3 \cong 14.137\ dm^3$$

Detto poi V_a il volume dell'acqua necessaria per ottenere il blocco di ghiaccio, si ha:

$$V_a + \frac{9.05}{100} \cdot V_a = 10\,, \qquad da\ cui:\ \frac{109.05}{100} V_a = 10, \quad V_a = \frac{1000}{109.05} \cong 9.170\ dm^3$$

Quindi l'acqua necessaria per ottenere il blocco di ghiaccio è di $9.170\ dm^3$, inferiore alla capacità del contenitore che è di $14.137\ dm^3$:

quindi il recipiente è in grado di contenere l'acqua necessaria a produrre il blocco richiesto.

Dobbiamo ora trovare l'altezza del cilindro ottenuto dal recipiente riempito con $9.170\ \ dm^3$ di acqua.

Essendo $V_a = 9.170\ dm^3 = \pi R^2 h = \pi(1.5)^2 \cdot h\ \ dm^3 = 9.170\ \ dm^3$:

$$h = \frac{9.170}{\pi(1.5)^2}\ dm \cong 1.3\ \ dm.$$

L'altezza dal fondo del recipiente è di circa 1.3 dm.

Con la collaborazione di Angela Santamaria e Stefano Scoleri