

SIMULAZIONE SECONDA PROVA SCRITTA – 02 APRILE 2019

Tema di MATEMATICA-FISICA

Q1

Assegnato $k \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione così definita: $g(x) = \frac{(k-1)x^3 + kx^2 - 3}{x-1}$.

- Come va scelto il valore di k affinché il grafico di g non abbia asintoti?
- Come va scelto il valore di k affinché il grafico di g abbia un asintoto obliquo?

Giustificare le risposte e rappresentare, nei due casi, i grafici delle funzioni ottenute.

a) Il grafico di g non ha asintoti verticali se il limite per x che tende a 1 NON è infinito. Affinchè accada ciò è necessario che il numeratore si annulli per $x=1$, quindi: $k-1+k-3=0$, $k=2$.

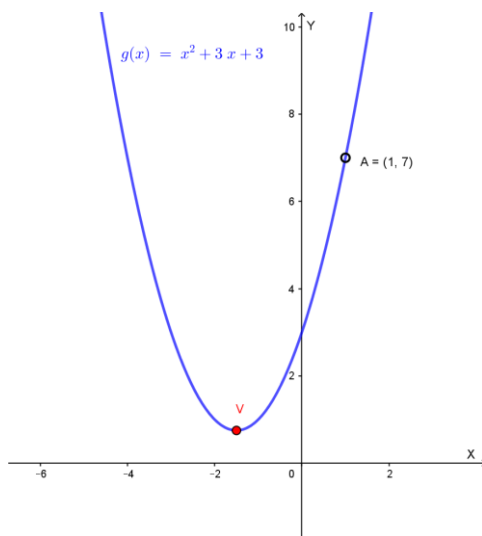
Se $k=2$ la funzione diventa:

$$g(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 3}{x-1}$$

Abbassando di grado il numeratore con la regola di Ruffini e la radice $x=1$ abbiamo:

$$g(x) = \frac{(x-1)(x^2 + 3x + 3)}{x-1} = x^2 + 3x + 3 \quad \text{con } x \neq 1$$

Questa funzione (parabola privata del punto $(1; 7)$) non ha asintoti verticali, né orizzontali, né obliqui. Il vertice è $V = \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right)$ e la parabola taglia l'asse y in $(0; 3)$:



b) La funzione ha un asintoto obliquo se il grado del numeratore supera di 1 il grado del denominatore, quindi deve essere $k=1$. La funzione ha equazione:

$g(x) = \frac{x^2-3}{x-1}$; questa funzione (con un asintoto verticale ed uno obliquo) è un'iperbole, essendo riconducibile a $y(x-1) = x^2 - 3$, che è una conica.

L'asintoto verticale ha equazione $x=1$. Cerchiamo l'asintoto obliquo:

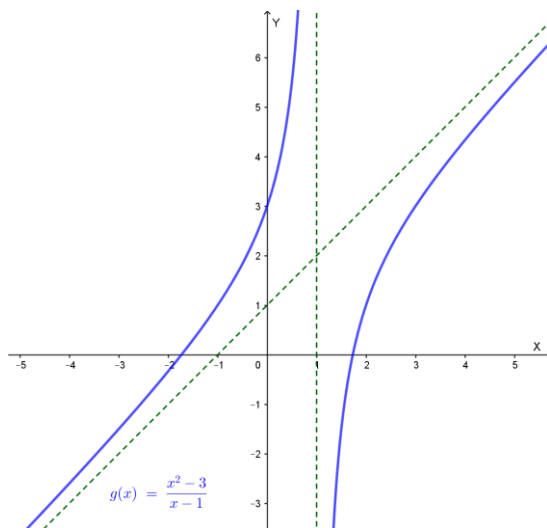
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-3}{x^2-x} = 1, \quad q = \lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-3}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x-1} \right) = 1$$

Asintoto obliquo: $y = x + 1$. Per $x=0$ si ha $y=3$ e per $y=0$ si ha $x = \pm\sqrt{3}$.

$$y' = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2} > 0 \text{ per ogni } x \neq 1; \text{ non ci sono massimi nè minimi}$$

$y'' = -\frac{4}{(x-1)^3} > 0$ per $x < 1$: concavità verso l'alto per $x < 1$, verso il basso per $x > 1$, nessun flesso.

Grafico:



Q 2

Sia f una funzione pari e derivabile in \mathbb{R} , sia g una funzione dispari e derivabile in \mathbb{R} . Dimostrare che la funzione f' è dispari e che la funzione g' è pari. Fornire un esempio per la funzione f ed un esempio per la funzione g , verificando quanto sopra.

Se f è pari si ha: $f(-x) = f(x)$. Dobbiamo dimostrare che la sua derivata prima è dispari, cioè che: $f'(x) = -f'(-x)$.

Ma risulta: $f'(x) = (f(-x))' = f'(-x)(-1) = -f'(-x)$ c. v. d

Se g è dispari risulta: $g(x) = -g(-x)$; quindi: $g'(x) = -(g'(-x)(-1)) = g'(-x)$ quindi g' è pari.

Esempi: $f(x) = x^2, f'(x) = 2x; \quad g(x) = x^3, \quad g'(x) = 3x^2$

Q 3

Si consideri la funzione $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \int_1^x \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{t} dt$$

Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 1.

Il punto di ascissa 1 ha ordinata $f(1) = \int_1^1 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{t} dt = 0$.

Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale si ha:

$$f'(x) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)}{x}$$

Quindi il coefficiente angolare della tangente è: $m = f'(1) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Equazione tangente: $y - 0 = \frac{1}{2}(x - 1)$, $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Q 4

Nello spazio tridimensionale, sia r la retta passante per i punti $A(-2, 0, 1)$ e $B(0, 2, 1)$. Determinare le coordinate di un punto appartenente alla retta r che sia equidistante rispetto ai punti $C(5, 1, -2)$ e $D(1, 3, 4)$.

I parametri direttori della retta sono: $a = 0 + 2 = 2$, $b = 2 - 0 = 2$, $c = 1 - 1 = 0$. La retta AB ha quindi equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 0 + 2t \\ z = 1 + 0 \cdot t \end{cases} ; \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

Il generico punto P di r ha coordinate: $P = (-2 + 2t; 2t; 1)$. Deve essere $PC=PD$:

$$\sqrt{(-7 + 2t)^2 + (2t - 1)^2 + 9} = \sqrt{(-3 + 2t)^2 + (2t - 3)^2 + 9}$$

Elevando al quadrato e semplificando si ha: $t = 4$. Quindi: il punto richiesto è $P = (6; 8; 1)$.

Q 5

Emma fa questo gioco: lancia un dado con facce numerate da 1 a 6; se esce il numero 3 guadagna 3 punti, altrimenti perde 1 punto. Il punteggio iniziale è 0.

- Qual è la probabilità che, dopo 4 lanci, il suo punteggio sia ancora 0?
- Qual è la probabilità che, in una sequenza di 6 lanci, il punteggio non scenda mai sotto lo 0?

a) Affinchè il punteggio dopo 4 lanci sia 0 deve uscire una sola volta il 3, quindi si tratta di calcolare la probabilità di avere 1 successo (di probabilità $1/6$) su 4 prove ripetute:

$$p = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 4 \cdot \frac{5^3}{6^4} = \frac{125}{324} \cong 0.386 = 38.6 \%$$

b) Il punteggio scende sotto lo 0 se al primo lancio NON esce il 3 (probabilità $5/6$). Se al primo lancio esce il 3 (probabilità $1/6$), per avere un punteggio negativo nei 4 lanci successivi deve uscire un numero diverso da 3 (probabilità $\left(\frac{5}{6}\right)^4$).

Quindi la probabilità che il punteggio scenda sotto lo 0 è: $\frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^4$.

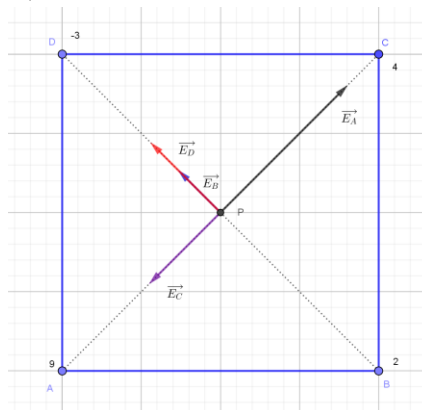
La probabilità che il punteggio NON SCENDA MAI sotto 0 è perciò:

$$p = 1 - \left[\frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^4 \right] = 1 - \frac{7105}{7776} = \frac{671}{7776} \cong 0.086 = 8,6 \%$$

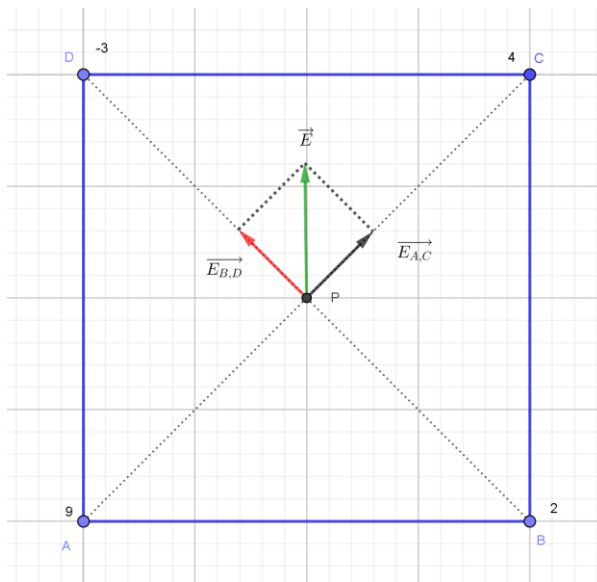
Q 6

Ai vertici di un quadrato ABCD, di lato 2 m, sono fissate quattro cariche elettriche. La carica in A è pari a 9 nC, la carica in B è pari a 2 nC, la carica in C è pari a 4 nC, la carica in D è pari a -3 nC. Supponendo che le cariche si trovino nel vuoto, determinare intensità, direzione e verso del campo elettrostatico generato dalle quattro cariche nel centro del quadrato.

Rappresentiamo i vettori relativi ai quattro campi elettrostatici nel centro P del quadrato (i valori indicati per le cariche sono in nC):



Osserviamo che, essendo $q_A - q_C = q_B + |q_D|$, il modulo $E_{A,C}$ del campo generato dalle cariche in A e C (diretto da P verso C) è uguale a quello, $E_{B,D}$, del campo generato da B e D (diretto da P verso D). Il campo risultante \vec{E} è indicato nella figura seguente (diretto da P verso l'alto):



Indicata con r la distanza dei vertici dal centro del quadrato ($r = \frac{2}{\sqrt{2}} m = \sqrt{2} m$ e con k la costante di Coulomb ($k = 9 \cdot 10^9 N \cdot \frac{m^2}{C^2}$), i moduli dei campi generati dalle quattro cariche sono:

$$E_A = k \frac{q_A}{r^2}, E_B = k \frac{q_B}{r^2}, E_C = k \frac{q_C}{r^2}, E_D = k \frac{q_D}{r^2}$$

Quindi:

$$E_{A,C} = \frac{k}{r^2} (q_A - q_C), E_{B,D} = \frac{k}{r^2} (q_B + |q_D|)$$

Pertanto:

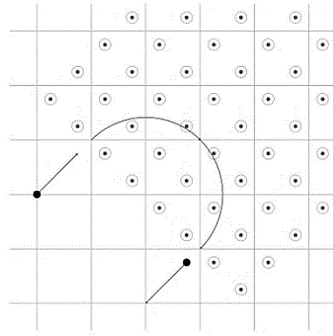
$$E = E_{A,C} \cdot \sqrt{2} = \frac{k \cdot \sqrt{2}}{r^2} (q_A - q_C) = \frac{9 \cdot 10^9 N \cdot \frac{m^2}{C^2} \cdot \sqrt{2}}{2 m^2} (9 \cdot 10^{-9} C - 4 \cdot 10^{-9} C) =$$

$$= \frac{45\sqrt{2}}{2} \frac{N}{C} \cong 31.8 \frac{N}{C} .$$

Q7

1. Un protone, inizialmente in quiete, viene accelerato da una d.d.p. di 400 V ed entra, successivamente, in una regione che è sede di un campo magnetico uniforme e perpendicolare alla sua velocità.

La figura illustra un tratto semicircolare della traiettoria descritta dal protone (i quadretti hanno lato 1,00 m). Determinare l'intensità di \vec{B} .



Calcoliamo l'accelerazione del protone (carica $q = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, diagonale di un quadratino $d = \sqrt{2} \text{ m}$):

$$ma = qE = \frac{qV}{d}, \quad a = \frac{qV}{dm}$$

Dalla legge di Lorentz otteniamo il legame fra il modulo del campo magnetico B con la massa della carica, la sua velocità ed il raggio $R=d$ della traiettoria circolare:

$$qvB = m \frac{v^2}{R}, \quad B = \frac{mv}{qR} \quad (\text{con } m \text{ massa del protone, } m = 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg})$$

Resta da calcolare la velocità con cui il protone entra nel campo magnetico. Trattandosi di un moto uniformemente accelerato si ha:

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \frac{qV}{dm} d} = \sqrt{2 \frac{qV}{m}}$$

Quindi:

$$B = \frac{mv}{qR} = \frac{m}{qR} \sqrt{2 \frac{qV}{m}} = \sqrt{2 \frac{mV}{qR^2}} = \sqrt{2 \cdot \frac{(1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg})(400 \text{ V})}{(1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C})(2 \text{ m}^2)}} \cong 0.00204 \text{ T} = 2.04 \cdot 10^{-3} \text{ T} = B.$$

Q 8

Si vuole ottenere l'emissione di elettroni da lastre metalliche di materiali diversi su cui incide una radiazione di frequenza $7,80 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. Determinare, motivando la risposta, quale tra i materiali in elenco è l'unico adatto allo scopo.

Materiale	Lavoro di estrazione
Argento	4,8 eV
Cesio	1,8 eV
Platino	5,3 eV

Individuato il materiale da utilizzare, determinare la velocità massima che può avere un elettrone al momento dell'emissione.

Ricordiamo che per avere emissione di elettroni la radiazione incidente deve avere un'energia superiore al lavoro di estrazione W tipico del metallo in questione. Detta ν la frequenza della radiazione incidente e h la costante di Planck, deve essere:

$$h\nu > W$$

Nel nostro caso si ha:

$$h\nu = (6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(7.80 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}) = 5.168 \cdot 10^{-19} \text{ J} = \frac{5.168 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}} \cong 3.2 \text{ eV}$$

Osservando la tabella allegata, risulta $h\nu > W$ per il Cesio.

Determiniamo ora la velocità massima che può avere un elettrone al momento dell'emissione.

Detta K l'energia cinetica massima e v la velocità massima al momento dell'emissione dell'elettrone di massa m , indicata con ν_0 la "frequenza di soglia" del cesio (legata al lavoro di estrazione dalla relazione $W = h\nu_0$), risulta:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = h\nu - h\nu_0 = h\nu - W(\text{cesio}) = 3.2 \text{ eV} - 1.8\text{eV} = 1.4 \text{ eV} =$$

$$= \left(1.4 \frac{\text{J}}{\text{C}}\right) (1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}) = 2.24 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

La velocità massima richiesta è quindi:

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2(2.24 \cdot 10^{-19} \text{ J})}{9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} \cong 0.701 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 7.01 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{velocità massima}$$

COSTANTI FISICHE		
carica elementare	e	$1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
costante di Planck	h	$6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
costante dielettrica nel vuoto	ϵ_0	$8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$
massa dell'elettrone	m_e	$9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
massa del protone	m_p	$1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Con la collaborazione di Angela Santamaria