SIMULAZIONE SECONDA PROVA SCRITTA – 28 FEBBRAIO 2019

Tema di MATEMATICA e FISICA

PROBLEMA 1

Assegnate due costanti reali a e b (con $a > 0$), si consideri la funzione $q(t)$ così definita:

$$q(t) = at \cdot e^{bt}$$

1)

A seconda dei possibili valori di a e b, discutere se nel grafico della funzione q è presente un punto di massimo o di minimo. Determinare i valori di a e b in corrispondenza dei quali il grafico della funzione $q(t)$, in un piano cartesiano di coordinate (t, y), ha un massimo nel punto $B\left(2, \frac{8}{e}\right)$.

La funzione è definita, continua e derivabile su tutto R e risulta:
$q' = a\,e^{bt} + abt\,e^{bt} = a\,e^{bt}(1 + bt) \geq 0 \quad se\ 1 + bt \geq 0.$
Se $b = 0$: $\ q = at,\ non\ si\ hanno\ massimi\ e\ minimi$
Se $b > 0$: $q' \geq 0\ \ se\ \ t \geq -\frac{1}{b}$: la funzione è crescente per $t > -\frac{1}{b}$ e decrescente per $t < -\frac{1}{b}$
Quindi abbiamo un minimo per $t = -\frac{1}{b}$.
Se $b < 0$: $q' \geq 0\ \ se\ \ t \leq -\frac{1}{b}$: la funzione è crescente per $t < -\frac{1}{b}$ e decrescente per $t > -\frac{1}{b}$
Quindi abbiamo un massimo per $t = -\frac{1}{b}$.

Per avere un massimo in B deve essere $-\frac{1}{b} = 2,\ \ b = -\frac{1}{2}$. Imponendo il passaggio per B si ha:
$q(2) = \frac{8}{e} = 2a\,e^{-1} = \frac{2a}{e}\ \ :\ \ \ a = 4\ .$

2)

Assumendo, d'ora in avanti, di avere $a = 4\ \ e\ \ b = -\frac{1}{2}$, studiare la funzione

$$q(t) = 4t \cdot e^{-\frac{t}{2}}$$

verificando, in particolare, che si ha un flesso nel punto $F\left(4, \frac{16}{e^2}\right)$.
Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto F.

Abbiamo già osservato che la funzione è definita, continua e derivabile su tutto R. Essa è positiva se t>o e negativa se t<0. Risulta q=0 solo se t=0. Calcoliamo i limiti:

$\lim\limits_{t\to-\infty} 4t\cdot e^{-\frac{t}{2}} = -\infty$ $(non\ c'è\ asintoto\ obliquo)$, $\quad \lim\limits_{t\to+\infty} 4t\cdot e^{-\frac{t}{2}} = \lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{4t}{e^{\frac{t}{2}}} = 0^+$

(asintoto orizzontale q=0).

Studiamo la derivata prima: abbiamo già detto che se $b<0:\ \ q'\geq 0\ \ se\ \ t\leq -\frac{1}{b}$: la funzione è crescente per $t< -\frac{1}{b}$ e decrescente per $t> -\frac{1}{b}$. Quindi abbiamo un massimo per $t=-\frac{1}{b}$.
Nel nostro caso $b=-\frac{1}{2}$, quindi punto di massi x=2: $B=\left(2;\ \frac{8}{e}\right)$.

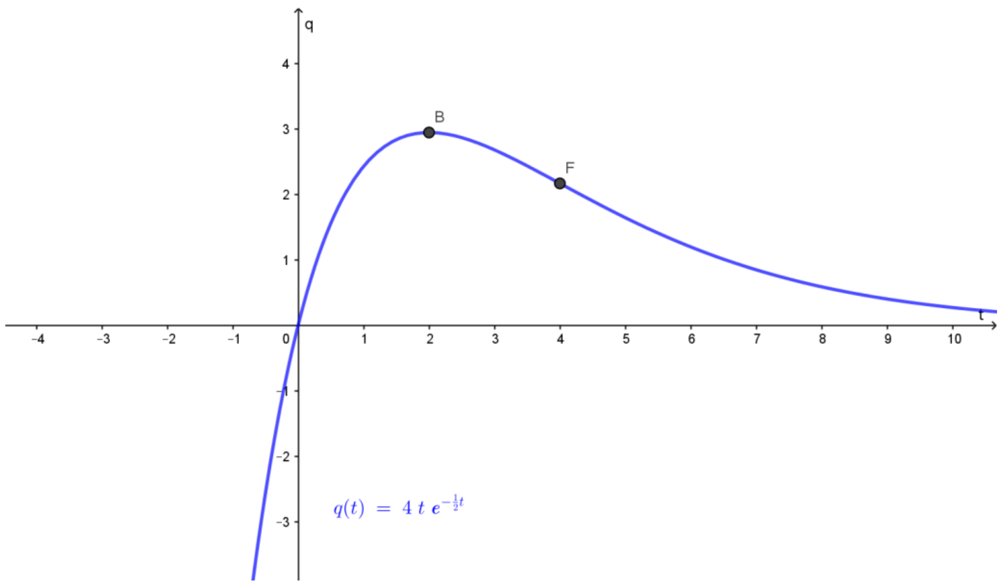
Studiamo la derivata seconda, notando che $q'=a\,e^{bt}(1+bt)=4\,e^{-\frac{1}{2}t}\left(1-\frac{1}{2}t\right)$.

$q''=-2\,e^{-\frac{1}{2}t}\left(1-\frac{1}{2}t\right)+4\,e^{-\frac{1}{2}t}\left(-\frac{1}{2}\right)=2\,e^{-\frac{1}{2}t}\left(\frac{1}{2}t-2\right)\geq 0\ \ se\ \ t\geq 4$: il grafico quindi volge la concavità verso l'alto per $t>4$ e verso il basso per $t<4$: t= 4 punto di flesso.

Risulta:

$q(4)=\frac{16}{e^2}$, $quindi\ abbiamo\ il\ flesso\ \ F=\left(4;\ \frac{16}{e^2}\right)$.

Grafico:



Determiniamo la tangente nel punto di flesso. Risulta $q'(4)=-\frac{4}{e^2}$, quindi la tangente inflessionale ha equazione:

$q-\dfrac{16}{e^2}=-\dfrac{4}{e^2}(t-4)\ ,\quad q=-\dfrac{4}{e^2}\,t+\dfrac{32}{e^2}$

3)

Supponendo che la funzione $q(t)$ rappresenti, per $t \geq 0$, la carica elettrica (misurata in C) che attraversa all'istante di tempo t (misurato in s) la sezione di un certo conduttore, determinare le dimensioni fisiche delle costanti a e b sopra indicate. Sempre assumendo $a = 4$ e $b = -\frac{1}{2}$, esprimere l'intensità di corrente $i(t)$ che fluisce nel conduttore all'istante t; determinare il valore massimo ed il valore minimo di tale corrente e a quale valore essa si assesta col trascorrere del tempo.

Si ha: $q(t) = at \cdot e^{bt}$

Essendo la dimensione di q quella di una carica elettrica, le dimensioni di a sono quelle di una corrente elettrica: dimensioni di a=[corrente elettrica]=[carica]/[tempo]=[i]

Siccome e^{bt} deve essere un numero puro, b ha le dimensioni di [1/tempo]:

dimensioni di b=[1/tempo]=[t^{-1}]

Determiniamo i(t):

$$i(t) = q'(t) = 4\, e^{-\frac{1}{2}t}\left(1 - \frac{1}{2}t\right) = 2\, e^{-\frac{1}{2}t}(2 - t) = i(t)$$

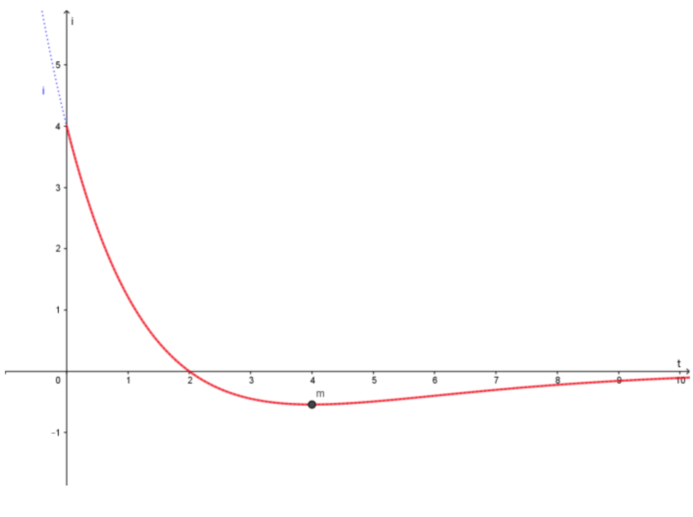
Studiamo la derivata di i(t):

$i'(t) = q''(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(t - 4) \geq 0 \;\; se \;\; t \geq 4$: i cresce per t>4 e decresce per $0 \leq t < 4$; t=4 è punto di minimo. Risulta poi $i(0) = 4 \;\; e \;\; \lim_{t \to +\infty} i(t) = 0^-$.

Quindi i è massima per t=0 (valore massimo 4) e minima per t=4 (valore minimo

$i(4) = q'(4) = -\frac{4}{e^2}$).

La corrente si assesta per $t \to +\infty$, quando tende a 0.
Grafico qualitativo di i(t):



4)

Indicando, per $t_0 \geq 0$, *con* $Q(t_0)$ *la carica totale che attraversa la sezione del conduttore in un dato intervallo di tempo* $[0, t_0]$, *determinare a quale valore tende* $Q(t_0)$ *per* $t_0 \to +\infty$. *Supponendo che la resistenza del conduttore sia* $R = 3\Omega$, *scrivere (senza poi effettuare il calcolo), un integrale che fornisca l'energia dissipata nell'intervallo di tempo* $[0, t_0]$.

Interpretando $q(t)$ come la carica che attraversa la sezione del conduttore nell'intervallo di tempo $[0; t]$, risulta: $Q(t_0) = q(t_0) = 4t_0 \cdot e^{-\frac{t_0}{2}}$.

Si ha poi:

$$\lim_{t_0 \to +\infty} 4t_0 \cdot e^{-\frac{t_0}{2}} = \lim_{t_0 \to +\infty} \frac{4t_0}{e^{\frac{t_0}{2}}} = 0^+ \quad \left(e^{\frac{t_0}{2}} \text{ è } infinito\ di\ ordine\ superiore\ rispetto\ 4t_0\right)$$

Se conoscessimo i(t) ma non q(t) allora, ricordando che: $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$, la carica che attraversa la sezione del conduttore nel tempo dt si ottiene nel seguente modo:

$dq(t) = i(t)\, dt$.

Nell'intervallo $[0, t_0]$ abbiamo:

$\int_o^{t_0} dq(t) = \int_o^{t_0} i(t)\ dt$, $q(t_0) - q(0) = \int_o^{t_0} 2\, e^{-\frac{1}{2}t}(2-t)\ dt$ che conduce allo stesso risultato:

$q(t_0) = 4t_0 \cdot e^{-\frac{t_0}{2}} = Q(t_0)$

L'energia dissipata nel tempo dt è: $dE = i^2 R dt$; nell'intervallo $[0, t_0]$ l'energia dissipata è:

$$E = \int_0^{t_0} i^2 R dt = \int_0^{t_0} \left(2\, e^{-\frac{1}{2}t}(2-t)\right)^2 \cdot 3\, dt = 12 \int_0^{t_0} e^{-t}(2-t)^2\, dt = E$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria