Sessione ordinaria 2022
Seconda prova scritta

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02 SCIENTIFICO

LI03 SCIENTIFICO OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Data la funzione :

$$f(x) = ax \cdot e^{-\frac{x}{b}}$$

1. determina i valori dei parametri reali non nulli a e b sapendo che la funzione ha un massimo relativo in $x = 3$ e passa per il punto di coordinate $\left(9; \frac{18}{e^3}\right)$.
2. Nel punto 1 hai verificato che $a = 2$ e $b = 3$, studia e rappresenta graficamente la funzione ottenuta per tali valori dei parametri.
3. Determina l'equazione della tangente *t* nell'origine degli assi cartesiani.
4. Calcola l'area della parte di piano delimitata dal grafico di $f(x)$ e dalla tangente *t* nell'intervallo $[0; 3]$.

PROBLEMA 2

Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{x + a}{1 + x^2}$$

dove a è un parametro reale.

1. Dimostra che, per qualsiasi valore di a, il grafico di $f(x)$ presenta un punto di massimo relativo, un punto di minimo relativo e un solo asintoto.
2. Dimostra che, per qualsiasi valore di a, la retta tangente al grafico di $f(x)$ nel suo punto C di intersezione con l'asse y ha in comune con il grafico di $f(x)$ anche l'intersezione D con l'asse x. Determina per quale valore di $a > 0$ il segmento CD misura $2\sqrt{2}$.
3. Indica con $g(x)$ la funzione che si ottiene per il valore $a = 2$ trovato al punto precedente. Studia e rappresenta graficamente $g(x)$, limitandoti allo studio della derivata prima.
4. Indica con $h(x)$ la funzione che si ottiene per il valore $a = 0$, verifica che si tratta di una funzione dispari. Sapendo che $g(x) > h(x)$ per ogni valore della variabile reale x, calcola l'area compresa tra i grafici delle due funzioni nell'intervallo $[-1; 1]$.

ISTITUTO di ISTRUZIONE SUPERIORE "ENRICO FERMI"
POLICORO – Via Puglia, n° 8

C.M. MTIS01700X - C.F. 81002070779
Sezioni associate: MTPS01701A (Liceo Scientifico, Scienze Applicate, Linguistico, Liceo TrED)
MTTH01701X (Istituto Tecnico Trasporti e Logistica)
Centralino (0835) 972034 – Fax 972034 – Sito web: www.enricofermipolicoro.edu.it
E-mail: MTIS01700X@ISTRUZIONE.IT PEC: MTIS01700X@PEC.ISTRUZIONE.IT
Codice univoco per la fatturazione elettronica: **UFNUNG**

QUESTIONARIO

1. Calcola il seguente limite mediante l'utilizzo di un limite notevole:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}.$$

2. Determina le equazioni degli eventuali asintoti della seguente funzione:

$$f(x)=1+\sqrt{x^2-2x+5}.$$

3. Studia la continuità e la derivabilità della seguente funzione:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\leq 1\\ x^2-4x+3 & 1<x\leq 3\\ \ln(x-2) & x>3\end{cases}$$

4. Indica il dominio ed eventuali punti di massimo e minimo della seguente funzione:

$$f(x)=\frac{1}{sinx\ cosx}\ in\ [0,2\pi].$$

5. Data la parabola di equazione $y=-x^2+4x$ si determini sull'arco AB un punto P, contenuto nel primo quadrante (con A coincidente con l'origine degli assi cartesiani di riferimento e B ulteriore intersezione con l'asse delle ascisse) in modo che, detta H la proiezione di P sull'asse x, sia massima l'area del triangolo APH.

6. Data la funzione

$$f(x)=\begin{cases}x^2-tx+1 & -2\leq x\leq 0\\ x+s & 0<x\leq 2\end{cases}$$

determinare i parametri t e s in modo che nell'intervallo $[-2;2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto in cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.

7. Calcola il seguente integrale applicando la formula di integrazione per parti:

$$\int\frac{\ln x}{x}dx$$

8. Dimostra che la seguente equazione ha una sola soluzione reale nell'intervallo $[0;1]$ e calcolane un valore approssimato con una cifra decimale esatta: $x-e^{-x}=0$.

Durata massima della prova: 5 ore.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.