SCUOLA MILITARE NUNZIATELLA

ESAME DI STATO

LICEO SCIENTIFICO

2^ PROVA SCRITTA: MATEMATICA

23 Giugno 2022

Classe V Sez. ...

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a quattro degli otto quesiti proposti.

PROBLEMA 1

a) Date le funzioni $f(x)=x^2-x-1$ e $g(x)=(x-1)\cdot e^{ax+bx^2}$, si determini per quale valore dei parametri a e b il grafico della funzione g passa il punto A (2; 1) ed è tangente alla retta di equazione $y=-x-1$ nel suo punto B di intersezione con l'asse y.

b) Verificato che i valori dei parametri sono $a = 2$ e $b = -1$, si studi la funzione g e se ne tracci il grafico utilizzando anche le derivate di ordine successivo al primo.

c) Dopo aver verificato che i grafici delle due funzioni hanno in comune i punti A e B e sono tangenti in B, si determini l'area della regione di piano delimitata dalle due curve relative alle funzioni f e g.

d) Definito il numero E come $E=\int_0^1 g(x)\,dx$, si verifichi che $\int_0^1 (x-1)^2 g(x)\,dx=\frac{1}{2}+E$. Si calcoli infine, se esiste, l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione $f(x)=\dfrac{1}{1+ke^{-x}}$ con k reale positivo.

a) Si trovino le coordinate del suo punto di flesso F in funzione del parametro k e si mostri che il coefficiente angolare della retta tangente in tale punto non dipende da k.

b) Si determini il valore di k in modo che la funzione f intersechi l'asse delle ordinate nel punto $P\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. Verificato che la condizione è soddisfatta per $k=1$, si studi la funzione corrispondente f_1 (utilizzando anche la derivata seconda) e se ne tracci il grafico Γ_1.

c) Si calcoli l'area della regione piana compresa tra Γ_1, l'asse y, l'asse x e la retta di equazione $x=\ln(a)$ con $a>1$. Che valore deve assumere a affinché tale area sia uguale a 1?

d) Si verifichi che $g(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ è la funzione inversa di f_1 e se ne tracci il grafico, indicandone il dominio e gli eventuali asintoti.

QUESTIONARIO

1. Si calcoli l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{3x^3+1}{x^2-1}\,dx$ e tra le primitive F(x) della funzione integranda si determini quella che soddisfa la condizione F(2) = ln3.

2. Si determini il dominio della funzione $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+2x+4}{(\log_2 x)^2-4\log_2 x+3}}$

3. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno alla retta y = 1 della regione di piano delimitata dalla curva di equazione $y = x^3 - x + 1$ e dalla retta stessa.

4. Tracciato il grafico della funzione

$$f(x)=\left|\frac{3-2x}{x-3}\right| \ ,$$

si verifichi se negli intervalli $[0;2]$ e $[4;6]$ valgono le ipotesi del teorema di Lagrange e in caso affermativo si trovino i punti la cui esistenza è prevista dal teorema. Esiste un intervallo in cui si possa applicare il teorema di Rolle? Si giustifichi la risposta.

5. Si calcoli, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\frac{lnt}{t}dt}{x^3}$$

6. Data la funzione $f(x)=x(ax^2+b)-3$, si determinino i valori di a e b per i quali il grafico della funzione è tangente nel punto di ascissa x=1 alla retta di equazione y = 7x – 9.

7. Si considerino i parallelepipedi rettangoli con base quadrata e aventi superficie totale di misura *A.* Tra questi si determini quello in cui risulta minima la somma delle lunghezze dei tre spigoli. Si tratta di un parallelepipedo particolare?

8. Si calcoli il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}(1-sinx)^{\frac{1}{x}}$$

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.