

I.I.I. Pacinotti Archimede

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario

PROBLEMA 1

Si consideri la funzione:

$$f(x) = b + a x \ln x \quad \text{con } a, b \text{ parametri reali.}$$

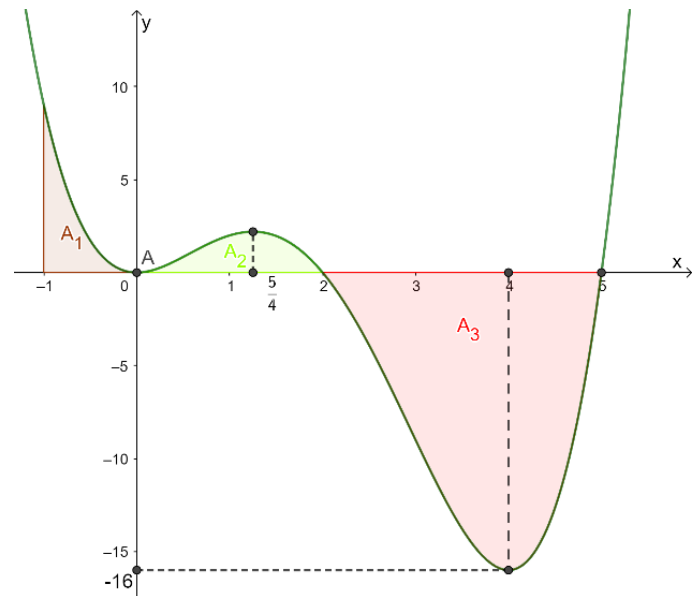
- a) Si determini il valore dei parametri a e b affinché la funzione passi per il punto $A(1,3)$ e risulti $f''(2) = 1$.
- b) Avendo verificato che $a = 2$ e $b = 3$, si proceda ad uno studio qualitativo della funzione tralasciando lo studio del segno e le intersezioni con gli assi. Si tracci quindi un grafico approssimato.
- c) Si determini l'equazione della retta tangente e di quella normale alla funzione nel suo punto A .
- d) Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione $f(x)$ e dalle rette di equazione $x = 1$, $x = e$ ed $y = 3$.

PROBLEMA 2

La curva riportata in figura è il grafico di una funzione $f(x)$ reale di variabile reale derivabile con derivata seconda continua in tutto l'intervallo considerato.

Consideriamo ora la funzione $F(x)$ primitiva di $f(x)$ che si annulla in zero:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$



a) Sapendo che i valori delle aree sono:

$$A_1 = \frac{317}{120} \sim 2,64 \quad A_2 = \frac{38}{15} \sim 2,53 \quad A_3 = \frac{1143}{40} \sim 28,58$$

calcolare il valore di $F(-1)$, $F(2)$, $F(5)$.

b) Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{38 - 15 F(x)}{x^2 - x - 2}$$

c) Usando le informazioni contenute nel grafico tracciare un grafico approssimativo della funzione $F(x)$.

d) Ipotizzando che la funzione $f(x)$ sia un polinomio, spiega perché deve essere almeno di grado 4. Dalle informazioni fornite dal grafico ricava i parametri $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(x) = ax^2(x - b)(x - c)$$

e traccia un grafico approssimato di $g(x) = f'(x)$.

QUESTIONARIO

1. Trovare per quale valore di a la funzione $f(x) = \frac{a}{\sqrt{x+1}}$ ha valore medio pari ad 1 nell'intervallo $[3; 8]$

2. Data la funzione $f(x) = \frac{3a+x^2}{x-2b}$ determinare a e b in modo che abbia un massimo nel punto di ascissa 2 e un minimo nel punto di ascissa 1.

3. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{9 + 3x^2} & \text{se } x < 3 \\ x + b \ln(x - 2) & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Determinare i valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ che rendono la funzione continua e derivabile su tutto \mathbb{R} .

4. Siano dati i punti $A(0,2,4)$, $B(4, -2,2)$, $C(1,0,1)$. Determinare l'equazione del piano α passante per il punto medio M del segmento AB e perpendicolare alla retta r che passa per i punti A e B. Scrivere inoltre l'equazione della sfera di centro C e raggio 3.

5. Trovare per quale valore di a la funzione $f(x) = \sqrt{9 - x^2} + ax$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[0,3]$. In corrispondenza del valore trovato determinare i punti c di cui il teorema garantisce l'esistenza.

6. Tra le primitive della funzione $f(x) = 15\sqrt{6 - 5x}$ determinare quella il cui grafico passa per il punto $A = (-2,3)$.

7. Data la funzione $f(x) = ax^4 + bx^3 + c$, determinare a , b e c in modo che abbia in $A(1,0)$ un flesso con tangente parallela alla retta $y = 2x$.

8. Da un mazzo di carte da 52 vengono estratte in successione due carte senza reinserimento. Qual è la probabilità che:

- a) entrambe le carte siano figure
- b) la prima carta sia un tre e la seconda un asso
- c) non si estragga né un asso né una figura