MINISTERO DELL'ISTRUZIONE

UFFICIO SCOLASTICO REGIONALE PER IL LAZIO

LICEO SCIENTIFICO STATALE

"PAOLO RUFFINI"

01100 VITERBO Piazza Dante Alighieri 13 · 0761/340694 · 0761/227186 ·

vtps010006@istruzione.it

Cod.Mecc.VTPS010006 C.F. 80015790563 · vtps010006@pec.istruzione.it; •

www.liceoruffiniviterbo.gov

INDIRIZZI: LI02 SCIENTIFICO- LI03 SCIENTIFICO- OPZIONE SCIENZE APPLICATE

LI15 SCIENTIFICO- SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO

TEMA DI MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

PROBLEMA 1

Si consideri una circonferenza γ_1 di raggio $\overline{C_1A} = x$ tangente internamente ad una circonferenza γ_2 di diametro $\overline{AB} = 2$, da B si conduca la tangente in T a γ_1 e si indichi con P l'intersezione di tale tangente con γ_2

1. Si esprima in funzione di x la misura di $\overline{BP}$ esplicitando le limitazioni per il valore di x.

2. Verificato che $\overline{\mathrm{BP}} = \frac{4\sqrt{1-x}}{2-x}$, studiare (tralasciando la derivata seconda) e tracciare il grafico di $f(x) = \frac{4\sqrt{1-x}}{2-x}$ evidenziando il tratto relativo alle limitazioni geometriche imposte dal problema. Si discuta il significato geometrico relativo al valore di x per cui ammette un massimo. Si discutano gli eventuali punti di non derivabilità della funzione $y = f(x)$.

3. Dal grafico di $y = f(x)$ si deduca quello di $y = f(|x|)$ motivando opportunamente i passaggi e si calcoli l'area della regione di piano compresa tra l'asse x ed $y = f(|x|)$.

4. La regione compresa tra $y = f(x)$ e l'asse delle x nell'intervallo $[-2; 0]$ è la base di un solido le cui sezioni perpendicolari all'asse x, sono rettangoli aventi altezza doppia della base, se ne calcoli il volume.

Utilizzando quanto già studiato nel punto **3**, applicare il Teorema della media integrale per trovare il valore medio di $y = f(x)$ in $[0; 1]$ ed interpretare geometricamente il valore di $f(c)$ (dove c è il punto la cui esistenza è assicurata da tale Teorema).

Durata della prova: 6 ore. È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile. È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

PROBLEMA 2

In un riferimento cartesiano Oxy sono date le funzioni $f_a(x) = x(lnx + a)$, dipendenti dal parametro reale a.

1. Verificare che tutte le funzioni $f_a(x)$ hanno un punto di minimo relativo D_a. Determinare il luogo descritto da D_a al variare di a in R.
2. Posto $a = -1$, studiare la funzione $f_{-1}(x)$ e tracciarne il grafico γ. Determinare i limiti per x che tende a 0 da destra della funzione e della sua derivata, e per quest'ultimo interpretare geometricamente il risultato ottenuto.
3. Sia $g(x) = \begin{cases} 0 & se\ x = 0 \\ |x(lnx - 1)| & se\ x \neq 0 \end{cases}$

   Stabilire se è applicabile il Teorema di Rolle nell'intervallo $[0; e]$ e il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[2; 3]$. In caso affermativo, determinare i punti di cui i teoremi garantiscono l'esistenza.
4. Sia A il punto in cui γ interseca la bisettrice del primo quadrante. Scrivere l'equazione della parabola P con asse parallelo all'asse y, passante per O e ortogonale in A a γ.

   Verificato che la parabola P ha equazione $y = -\frac{3}{2e^2}x^2 + \frac{5}{2}x$, calcolare l'area della regione delimitata dalla parabola, dall'asse x, dalle rette $x = 0$ e $x = e^2$.

Durata della prova: 6 ore. È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile. È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

QUESITI

1. La legge di variazione di velocità di un corpo di massa m che cade in un mezzo viscoso è data da $v(t) = v_L - (v_L - v_0)e^{-\frac{b}{m}t}$ dove:

- b è una costante positiva che si misura in $\frac{kg}{s}$
- v_0 è la velocità iniziale del corpo
- v_L è la velocità limite del corpo ed è pari a $v_L = \frac{m}{b}g$ dove g è l'accelerazione gravitazionale.

I seguenti grafici qui riportati descrivono invece l'andamento dell'accelerazione in funzione del tempo nei seguenti casi

a. $v_0 = 0$

b. $0 < v_0 < \frac{mg}{b}$

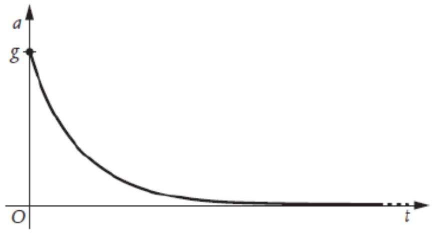
c. $v_0 = \frac{mg}{b}$

d. $v_{0>\frac{mg}{b}}$

A. 

B. 

C. 

D. 

Si associ a ciascun caso il grafico corrispondente motivando la risposta.

2. Sia γ il grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ con α reale e positivo. Si calcoli per quali valori di α risulta finito il volume del solido che si ottiene facendo ruotare di 360° attorno all'asse x la superficie di piano illimitata compresa tra γ, l'asse x e la retta $x = 1$, per $x \geq 1$.

3. Si consideri la funzione $f(x) = lnx + \frac{1}{x}$ nell'intervallo $[1; +\infty[$. Si determini:

a. l'espressione di $F(x)$, primitiva di $f(x)$ il cui grafico passa per il punto $A(1; 0)$;

b. il valore dell'integrale $\int_1^2 f(e^x)dx$;

c) il valore dell'integrale $\int_1^2 f(x)F(x)dx$.

4. Sia $f(x)$ una funzione continua in R con derivata prima continua. Il grafico di $f(x)$ ha come asintoto obliquo per $x \to +\infty$ la retta $y = 6x + \sqrt{3\pi}$. Si verifichi che la funzione

$$g(x) = \frac{\int_2^x f(t)\, dt}{x^2 + e^2}$$

ammette un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ e si determini l'equazione dell'asintoto.

5. Si dimostri che la funzione

$$f(x) = x^{2022} - 2022x + 3$$

ammette due radici, $\alpha \in [0; 1]$ e $\beta \in [1; 2]$.

6. Si calcoli il volume del solido ottenuto ruotando, di un giro completo attorno all'asse y, la regione di piano compresa tra le curve

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - 4 \quad \text{e} \quad g(x) = x - 4 \quad \text{per } x \in [0;\ 4].$$

7. Sia $f(x) = \frac{\pi}{2} sinx$ e $g(x) = -f(x)$ definite per $x \in [0; \pi]$. Dopo aver tracciato su uno stesso piano cartesiano le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ si consideri un rettangolo non degenere, con i lati paralleli agli assi cartesiani, inscritto nella zona finita di piano delimitata dalle due curve.
Si determinino le coordinate dei vertici del rettangolo di *perimetro* massimo

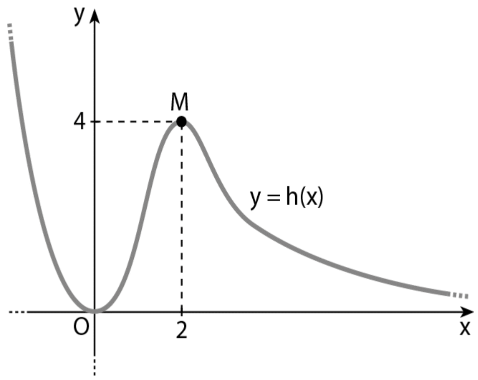
8. La figura mostra il grafico di una funzione $y = h(x)$.

a) Stabilisci, motivando la tua scelta, quale delle seguenti funzioni può essere utilizzata come modello per descrivere tale andamento:

i. $y = 1 - sin(kx)$,

ii. $y = kx^3 - 5kx^2 + 1$,

iii. $y = kx^2 e^{2k-x}$.



b) Una volta individuata la famiglia di funzioni, determina il valore del parametro k in modo che si abbia un massimo in $M(2; 4)$.

Durata della prova: 6 ore. È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile. È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.