



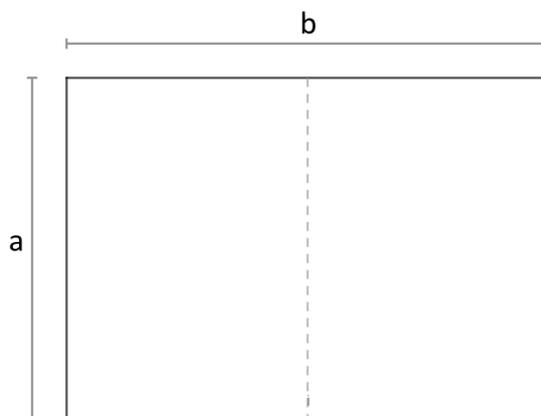
Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

I.I.S. "Edoardo Amaldi" – Roma
Indirizzo: LI02 – SCIENTIFICO
Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Il comune foglio di carta da stampante di forma rettangolare (denominato A4), ha i lati che rispettano tra loro una proporzione precisa: le dimensioni a e b del foglio sono tali che, se viene piegato a metà lungo il lato più lungo, si ottiene un rettangolo i cui lati mantengono lo stesso rapporto dell'originale.



- 1) Supponendo che il lato più corto di un foglio in formato A4 abbia misura $a = 10$ cm, qual è la lunghezza b del lato più lungo?
- 2) Si rappresenti in un sistema di riferimento cartesiano il rettangolo $OACB$, con $OA = a$ e $OB = b$, utilizzando per a e b i valori ricavati nel punto precedente. Sia $P(k; 0)$ un punto variabile sul segmento OB e sia M il punto medio del segmento OA . Si calcoli, in funzione del parametro k , la superficie S_1 del triangolo MPC e la superficie S_2 del triangolo APB . Come variano i valori di S_1 e S_2 al variare di k ?
- 3) Siano V_1 e V_2 i volumi dei due solidi di rotazione ottenuti facendo ruotare attorno all'asse delle x rispettivamente il triangolo MPC e il triangolo APB . Si determini la loro misura in funzione del parametro k , verificando poi che sussistono le uguaglianze $V_1 = 10\pi S_1$ e $V_2 = \frac{20}{3}\pi S_2$.
- 4) Si consideri adesso la funzione definita da $f(k) = \frac{2}{25} \frac{S_1 S_2}{k}$ e si verifichi che tale funzione è uguale a:

$$f(k) = \frac{200 - k^2}{k}$$

Si studino le caratteristiche e si rappresenti il grafico della funzione $y = f(k)$ in un sistema di riferimento cartesiano Oky .

PROBLEMA 2

È data la funzione così definita:

$$f(x) = \frac{a + b \ln x}{x}$$

con a e b parametri reali tali che $a > 0$ e $b > 0$.

- 1) Si analizzino le condizioni dei parametri a e b affinché la funzione $f(x)$ abbia un punto di massimo relativo per $x = 1$ e un punto di flesso per $x = e^{1/2}$.
- 2) Si studi la funzione $f(x)$ per $a = b = 1$ e si rappresenti il suo grafico.
- 3) Si calcoli l'area della regione di piano delimitata dal grafico della funzione, dagli assi coordinati e dalla retta tangente al grafico della funzione nel suo punto di massimo.
- 4) Si determini, inoltre, il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa attorno all'asse delle x della parte di piano delimitata dalla retta tangente al grafico della funzione nel suo punto di ascissa e , dalla retta $x = e$, dall'asse delle x , dall'asse delle y e dalla funzione $y = \frac{\ln x}{5}$.

QUESTIONARIO

Quesito 1. Studiare la continuità e la derivabilità della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln x^2 & -1 < x < 1 \\ \frac{x^2}{2} & x \geq 1 \\ x^2 - 1 & x \leq -1 \end{cases}$$

Quesito 2. Determinare per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ il seguente limite assume il valore indicato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + kx)}{8x} = e$$

Quesito 3. Stabilire, giustificando la risposta, se l'equazione

$$(x - 3)^2 + \ln(x - 3) = 0$$

ammette soluzioni reali. In caso di risposta affermativa, stabilire se la soluzione è unica.

Quesito 4. Volendo costruire un triangolo isoscele con un filo lungo 60 cm, qual è la massima area (espressa in cm^2) che si può ottenere?

Quesito 5. Determinare il risultato del limite seguente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \int_0^{x^2} \frac{t}{1 - \sin t} dt$$

Quesito 6. Determinare se è possibile applicare alla funzione $f(x)$, definita in basso, il teorema di Lagrange nell'intervallo $I = [0; 1]$. In caso affermativo, determinare il punto o i punti previsti dal teorema.

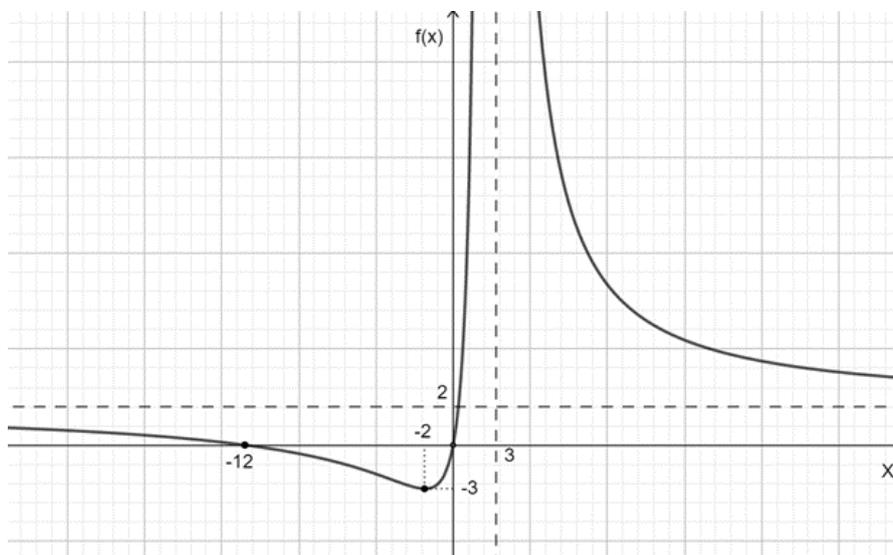
$$f(x) = e^{3x-1}$$

Considerato poi l'intervallo $I_\alpha = [0; \alpha]$, con α numero reale positivo, stabilire se esistono valori di α per i quali è possibile applicare alla funzione $f(x)$ il teorema di Rolle nell'intervallo I_α . Motivare la risposta.

Quesito 7. Applicando la definizione di derivata, determinare la derivata della funzione $f(x) = \frac{x+1}{x}$ in un punto generico x_0 del suo dominio D .

Quesito 8. Dato il seguente grafico della funzione $f(x)$, produrre una rappresentazione grafica delle tre funzioni di seguito elencate, indicando in particolare i punti deducibili per cui le funzioni stesse passano.

$$f(|x|) \qquad 3f(x-5) \qquad f'(x)$$



Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 350 Art. 18 comma 8).

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.