



MINISTERO DELL'ISTRUZIONE

Esami di Stato

SCUOLA SECONDARIA DI SECONDO GRADO

LICEO SCIENTIFICO OPZ.SCIENZE APPLICATE "ISTITUTO ALEANDRI" DI MACERATA

ANNO SCOLASTICO 2021/2022

PROVA DI ESAME: MATEMATICA

TRACCIA B

*Il candidato risolve uno dei seguenti problemi e risponde a 4 quesiti.*

### PROBLEMA 1

Considera la famiglia di funzioni  $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita ponendo

$$f_a(x) = \frac{x + a}{1 + x^2},$$

dove  $a$  è un parametro reale.

1. Dimostra che, per qualsiasi valore di  $a$ , il grafico di  $f_a(x)$  presenta un punto di massimo relativo, un punto di minimo relativo e un solo asintoto.
2. Dimostra che, per qualsiasi valore di  $a$ , la retta tangente al grafico di  $f_a(x)$  nel suo punto  $C$  di intersezione con l'asse  $y$  ha in comune con il grafico di  $f_a(x)$  anche l'intersezione  $D$  con l'asse  $x$ . Determina per quale valore di  $a > 0$  il segmento  $CD$  misura  $2\sqrt{2}$ .
3. Indica con  $g(x)$  la funzione che si ottiene per il valore  $a = 2$  trovato al punto precedente. Studia e rappresenta graficamente  $g(x)$ , limitandoti allo studio della derivata prima.
4. Trova per quale valore di  $a$  nella famiglia delle funzioni  $f_a(x)$  si ottiene la funzione  $h(x)$  che ha il grafico simmetrico rispetto all'origine.

Verifica che  $g(x) > h(x)$  per ogni  $x$  del loro dominio e calcola l'area compresa tra i grafici delle due funzioni nell'intervallo  $[-1; 1]$ .

Durata massima della prova: 6 ore

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 350 Art.18 comma 8).

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

## PROBLEMA 2

Sia  $f$  la funzione definita da:  $f(x) = 2x - 3x^3$ .

1. Disegnare il grafico  $G$  di  $f$ .
2. Nel primo quadrante degli assi cartesiani, considerate la retta  $y = c$  che interseca  $G$  in due punti distinti e le regioni finite di piano  $R$  e  $S$  che essa delimita con  $G$ . Precisamente:  $R$  delimitata dall'asse  $y$ , da  $G$  e dalla retta  $y = c$  e  $S$  delimitata da  $G$  e dalla retta  $y = c$ .
3. Determinare  $c$  in modo che  $R$  e  $S$  siano equivalenti e determinate le corrispondenti ascisse dei punti di intersezione di  $G$  con la retta  $y = c$ .
4. Determinare la funzione  $g$  il cui grafico è simmetrico di  $G$  rispetto alla retta  $y = \frac{4}{9}$ .

## QUESITI

### QUESITO 1

Studia la continuità e determina gli eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{|x^2 - 1|}.$$

### QUESITO 2

Determina le equazioni degli eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x + 4}.$$

### QUESITO 3

Dimostra che l'equazione

$$2^x - \cos x - 1 = 0$$

ha una sola soluzione nell'intervallo  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Durata massima della prova: 6 ore

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 350 Art.18 comma 8).

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

#### QUESITO 4

Si calcoli il dominio della funzione  $y = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}$ .

#### QUESITO 5

Si calcoli il limite  $\lim_{x \rightarrow 0} 4 \frac{\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$ , giustificando i calcoli fatti.

#### QUESITO 6

Se la funzione  $f(x) - f(2x)$  ha derivata 5 in  $x=1$  e derivata 7 in  $x=2$ , calcola il valore della derivata di  $f(x) - f(4x)$  in  $x=1$ .

#### QUESITO 7

Si dimostri che il  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - e^{\operatorname{sen} \pi}}{x - \pi} = -1$ .

#### QUESITO 8

Data la funzione  $f(x)$  definita in  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x(2x + x^2)$ , individuare la primitiva di  $f(x)$  il cui grafico passa per il punto  $(1, 2e)$ .

Durata massima della prova: 6 ore

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 350 Art.18 comma 8).

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.