LICEO SCIENTIFICO STRAORDINARIA 2023 - PROBLEMA 1

Si consideri la famiglia di funzione $f_n(x) = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^n}$ *con* $n \in N$ *e* $n > 1$.

a)

Verificare che tutte le curve rappresentate dalle funzioni della famiglia $f_n(x)$ *passano per uno stesso punto e scrivere le sue coordinate. Determinare, in funzione del parametro n, le ascisse degli estremi e dei flessi e calcolarne il limite, con n→∞. Scrivere le equazioni degli asintoti e tracciare i grafici delle funzioni* f_n *, evidenziando le differenze tra i casi in cui n è pari da quelli in cui n è dispari.*

$\boldsymbol{y = f_n(x) = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^n} \quad con\ n \in N\ \ e\ \ n > 1}$

Con n=2 abbiamo: $y = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}$ e con n=3: $y = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^3}$. Intersechiamo queste due curve:

$$\begin{cases} y = 2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{x^2} \\ y = 2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{x^3} \end{cases} \Rightarrow 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^3}\,, \qquad + \frac{3}{x^2} = + \frac{3}{x^3}\,,\ x = 1\,, \qquad quindi:\ y = 2$$

Verifichiamo che il punto (1; 2) appartiene a tutte le curve:

$$2 = 2 - \frac{3}{1} + \frac{3}{1^n}\,,\ \ 2 = 2:\ \ verificato\ per\ ogni\ n.$$

Quindi tutte le curve passano per il punto di coordinate $(1; 2)$.

Cerchiamo le ascisse degli estremi e dei flessi delle curve in funzione di n.

$$y = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^n}$$

Dominio: $x \neq 0$ (per tali valori la generica funzione è continua e derivabile due volte, quindi nelle ascisse degli estremi si deve annullare la derivata prima e nelle ascisse dei flessi la derivata seconda).

$$y' = \frac{3}{x^2} - \frac{3n}{x^{n+1}} = 0,\ \ x^{n-1} - n = 0, \qquad x^{n-1} = n$$

$y' \geq 0$, $\frac{x^{n-1}-n}{x^{n+1}} \geq 0$; se n è dispari $y' \geq 0\ \ se\ \ x^{n-1} - n \geq 0,\ x \leq -\sqrt[n-1]{n}\ \ vel\ \ x \geq \sqrt[n-1]{n}$:

	$-\sqrt[n-1]{n}$	0		$\sqrt[n-1]{n}$
N	+	-	-	+
D	+	+	+	+
y’	+	-	-	+
	M		m	

Quindi **per n dispari** la funzione cresce se $x < -\sqrt[n-1]{n}$, decresce per $-\sqrt[n-1]{n} < x < 0 \;\; e \;\; per$ $0 < x < \sqrt[n-1]{n}$, cresce per $x > \sqrt[n-1]{n}$. Perciò $x = -\sqrt[n-1]{n}$ è punto di massimo relativo e $x = \sqrt[n-1]{n}$ è punto di minimo relativo.

Per n pari $y' \geq 0,\;\; \frac{x^{n-1}-n}{x^{n+1}} \geq 0 \;\; per\; x < 0 \quad e \quad per \quad x \geq \sqrt[n-1]{n} \;\; perciò$:
la funzione cresce se $x < 0, decresce\; per\;\; 0 < x < \sqrt[n-1]{n} \;\; e\; cresce\; per\;\; x > \sqrt[n-1]{n}$. Pertanto $x = \sqrt[n-1]{n}$ è punto di minimo relativo.

		0	$\sqrt[n-1]{n}$
N	-	-	+
D	-	+	+
y'	+	-	+
		$\nexists$	m

Riepilogando:
se n è pari un estremo per $x = \sqrt[n-1]{n}$ (minimo relativo)
se n è dispari abbiamo due estremi di ascisse: $x = -\sqrt[n-1]{n}$ (punto di massimo relativo) e $x = \sqrt[n-1]{n}$ (punto di minimo relativo).

Calcoliamo i limiti richiesti:
Per n pari: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{n} = \lim_{n\to\infty} \left(n^{\frac{1}{n-1}}\right): F.I\; \infty^0;\;\; \lim_{n\to\infty}(e)^{\ln n^{\frac{1}{n-1}}} = \lim_{n\to\infty}(e)^{\frac{1}{n-1}\ln n} = \lim_{n\to\infty} e^{\left(\frac{\ln n}{n-1}\right)} = e^0 = 1$
(ricordiamo che $n-1$ è infinito di ordine superiore rispetto a $\ln n$)

Per n dispari: $\lim_{n\to\infty}\left(\pm\sqrt[n-1]{n}\right) = \pm 1$ (i passaggi sono uguali a quelli fatti per n pari).

$$y'' = -\frac{6}{x^3} + \frac{3n(n+1)}{x^{n+2}} = 0, \qquad -2(x^{n-1}) + n(n+1) = 0, \qquad x^{n-1} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$y'' \geq 0 \;\; se \;\; \frac{-2(x^{n-1})+n(n+1)}{x^{n+2}} \geq 0$; se n è pari $y'' \geq 0\; per\; -2(x^{n-1}) + n(n+1) \geq 0:\;\; x \leq \sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$ (con $x \neq 0$) perciò $x = \sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$ è punto di flesso:

		0	$\sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$
y''	+	+	-
		$\nexists$	F

Se n è dispari il numeratore è positivo per $-\sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}} < x < \sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$

$ed\; il\; denominatore$ è $positivo\; per\; x > 0$ perciò $y'' > 0 \;\; se \;\; x < -\sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$ e per

$0 < x < \sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$:

	$-\sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$		0	$\sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$
N	-	+	+	-
D	-	-	+	+
y''	+	-	+	-
	F_1	$\nexists$	F_2	

Pertanto il grafico volge la concavità verso l'alto se $x < -\sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$ e $0 < x < \sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$ e verso il basso se $-\sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}} < x < 0 \;\; e \;\; x > \sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$; perciò $x = \pm\sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$ sono punti di flesso.

Riepilogando:

se n è pari abbiamo un flesso per $x = \sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$

se n è dispari abbiamo due flessi di ascisse: $x = \pm\sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$

Calcoliamo ora limiti richiesti:

Per n pari: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2}^{\frac{1}{n-1}}\right): F.I\ \infty^0;\ \lim_{n\to\infty}(e)^{\ln\frac{n(n+1)}{2}^{\frac{1}{n-1}}} = \lim_{n\to\infty}(e)^{\frac{1}{n-1}\ln\frac{n(n+1)}{2}} =$
$\lim_{n\to\infty} e^{\left(\frac{\ln\frac{n(n+1)}{2}}{n-1}\right)} = e^0 = 1$

$(n-1$ è $infinito\ di\ ordine\ superiore\ rispetto\ a\ \ \ln\frac{n(n+1)}{2})$

Per n dispari: $\lim_{n\to\infty}\left(\pm\sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}\right) = \pm 1$ (i passaggi sono uguali a quelli fatti per n pari).

Cerchiamo ora gli asintoti

Siccome $\lim_{x\to\pm\infty}\left(2-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^n}\right) = 2$, tutte le curve hanno l'asintoto orizzontale di equazione $y = 2$.

Non ci sono quindi asintoti obliqui.

Cerchiamo gli eventuali asintoti verticali:

$\lim_{x\to 0}\left(2-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^n}\right) = \lim_{x\to 0}(2-3x^{-1}+3x^{-n-1}) = \lim_{x\to 0}(2-3x^{-1}+3x^{-n}) = \lim_{x\to 0}(3x^{-n}) = \infty$

(siccome $-n < -1\ per\ ogni\ n, essendo\ n > 1,\ x^{-n}$ è $infinito\ di\ ordine\ superiore\ rispetto\ a\ x^{-1}\ per\ x \to 0$).

In particolare, per n pari sia il limite destro che il limite sinistro per $x \to 0$ è $+\infty$, se n è dispari il limite destro è $+\infty$, quello sinistro $-\infty$.

Tutte le curve hanno l'asintoto verticale di equazione $x = 0$.

Quanto ricavato sul dominio, sugli estremi, sui flessi e sugli asintoti ci permette di tracciare un grafico qualitativo delle funzioni.

Grafico delle funzioni per n pari (per esempio n=2):

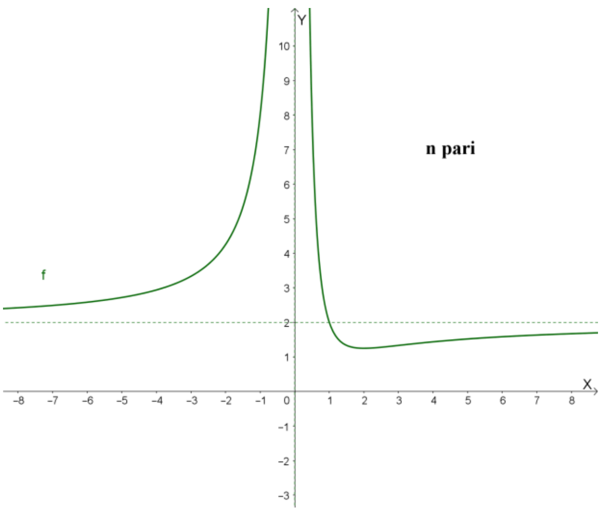
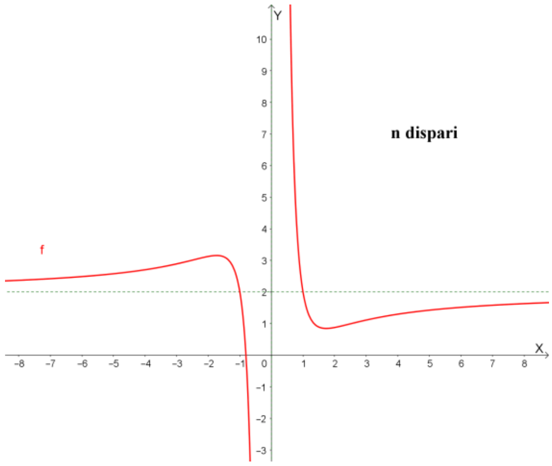


Grafico per n dispari (per esempio n=3):



b)

Si assuma n=3, studiare la funzione $f_3(x)$ e tracciare un suo grafico rappresentativo, dimostrando che ammette un unico zero di segno negativo. Discutere, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione $f_3(x) = k$.

Per n=3 si ha:

$$y = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^3}$$

Sfruttando quanto abbiamo già detto nel caso generale abbiamo:

Dominio: $x \neq 0$

$\lim_{x \to \pm\infty} \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^3}\right) = 2$: asintoto orizzontale di equazione $y = 2$.

Non ci sono quindi asintoti obliqui.

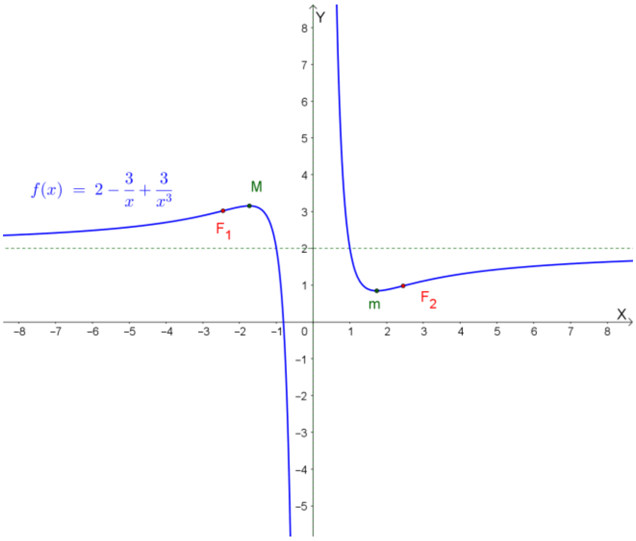
La funzione cresce se $x < -\sqrt{3}$, decresce per $-\sqrt{3} < x < 0$ *e per* $0 < x < \sqrt{3}$, cresce per $x > \sqrt{3}$. Perciò $x = -\sqrt{3}$ è punto di massimo relativo e $x = \sqrt{3}$ è punto di minimo relativo (ordinata del massimo: $2 + \frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{3}{3\sqrt{3}} = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$, ordinata del minimo $2 - \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{3}{3\sqrt{3}} = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$).

In base a quanto visto nel caso generale, con n=3 abbiamo: il grafico volge la concavità verso l'alto se $x < -\sqrt{6}$ e $0 < x < \sqrt{6}$ e verso il basso se $-\sqrt{6} < x < 0$ *e* $x > \sqrt{6}$; perciò $x = \pm\sqrt{6}$ sono punti di flesso, con ordinate rispettivamente:

se $x = \sqrt{6}$, $y = 2 - \frac{3}{\sqrt{6}} + \frac{3}{6\sqrt{6}} = 2 - \frac{5}{2\sqrt{6}} \cong 0.98$

se $x = -\sqrt{6}$, $y = 2 + \frac{3}{\sqrt{6}} - \frac{3}{6\sqrt{6}} = 2 + \frac{5}{2\sqrt{6}} \cong 3.02$

Il grafico della funzione in oggetto è quindi il seguente:



Notiamo che il grafico taglia l'asintoto orizzontale in due punti; troviamone le ascisse:

$$2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^3} = 2\,, \quad \frac{3}{x^3} = \frac{3}{x}\,, \quad x^2 = 1\!: \; x = \pm 1.$$

Il grafico della funzione taglia l'asse delle x in un solo punto (di ascissa negativa, compresa fra -1 e 0), quindi la funzione ha un unico zero di segno negativo.

Discutiamo il numero ed il segno delle soluzioni dell'equazione $f_3(x) = k$.

Ciò equivale a studiare il numero ed il segno delle ascisse dei punti di intersezione fra i grafici delle funzioni di equazioni $y = f_3(x)$ *ed* $y = k$ $(rette\ parallele\ all'asse\ x)$.
Osservando il grafico di $y = f_3(x)$ e ricordando che l'ordinata del massimo relativo è $2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ e quella del minimo relativo $2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$, si deduce che l'equazione $f_3(x) = k$ ha**:**

- 1 soluzione (negativa) per $k < 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$
- 1 soluzione negativa ed una positiva (doppia) per $k = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$
- 3 soluzioni (una negativa ed una positiva) per $2 - \frac{2}{\sqrt{3}} < x < 2$
- 2 soluzioni (una negativa e due positive) per $k = 2$
- 3 soluzioni (due negative ed una positiva) per $2 < k < 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$
- 1 soluzione negativa (doppia) ed una positiva per $k = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$
- 1 soluzione positiva per $k > 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$

c)

Si consideri la funzione $g(x) = 2 - \frac{3}{x}$ *e verificare che,* $\forall x > 0$*, vale la disuguaglianza*

$f_n(x) > g(x)$ *indipendentemente dal valore di* n*. Si consideri l'integrale*

$$I(t) = \int_1^t (f_n(x) - g(x))\,dx$$

che esprime l'area della regione delimitata dai grafici delle funzioni f_n *e* g *e dalle rette di equazioni* $x = 1$ *e* $x = t,\ t > 1$*. Si calcolino* $I(t)$ *e il* $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t)$ *, fornendo un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.*

Verifichiamo che $f_n(x) > g(x)\ \forall x > 0$ indipendentemente dal valore di n.

$$2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^n} > 2 - \frac{3}{x}\,, \qquad \frac{3}{x^n} > 0 \quad \forall x > 0 \ \ indipendentemente\ da\ n:\ \ c.v.d.$$

Calcoliamo ora il seguente integrale:

$$I(t) = \int_1^t (f_n(x) - g(x))\,dx = \int_1^t \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^n} - \left(2 - \frac{3}{x}\right)\right) dx = \int_1^t \left(\frac{3}{x^n}\right) dx = \int_1^t (3x^{-n})\,dx =$$

$$= \left[\frac{3x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^t = \frac{3t^{-n+1}}{-n+1} - \frac{3}{-n+1} = I(t)$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{3t^{-n+1}}{-n+1} - \frac{3}{-n+1}\right) = \frac{3}{n-1} = \lim_{t\to+\infty} I(t)$$

Significato geometrico di tale limite: rappresenta l'area (finita per ogni n>1) della **regione aperta (con x>1)** delimitata dai grafici delle due funzioni e dalla retta di equazione x = 1.

d)

Calcolare il $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f_n(x)-2}{g(x)-2}$

e verificare che il risultato non dipende da $n \in N, n > 1$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_n(x)-2}{g(x)-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^n}-2}{2-\frac{3}{x}-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^n}}{-\frac{3}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{3}{x}}{-\frac{3}{x}} = 1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f_n(x)-2}{g(x)-2}$$

(**N.B.** Per $x \to \infty$ $\frac{3}{x^n}$ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a $-\frac{3}{x}$, essendo *n>1*).

Con la collaborazione di Angela Santamaria