LICEO SCIENTIFICO STRAORDINARIA 2023 - PROBLEMA 2

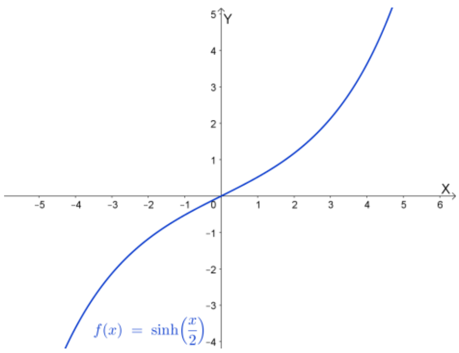
Si considerino le famiglie di funzioni $f_a(x)=\frac{1}{2}(e^{ax}-e^{-ax})$ *e* $g_a(x)=\frac{1}{2}(e^{ax}+e^{-ax})$ *con a parametro reale positivo.*

a)

Si traccino, al variare del parametro, i grafici rappresentativi γ_f *e* γ_g *delle funzioni* $f_a(x)$ *e* $g_a(x)$ *evidenziando simmetrie, estremi e flessi.*

$$\boldsymbol{y=f_a(x)=\frac{1}{2}(e^{ax}-e^{-ax}),\qquad con\ a>0}$$

(N.B. La funzione in questione è il seno iperbolico di (ax): $y=\sinh(ax)$ ed il grafico è del tipo $(con\ a=1/2)$):



Studiamo comunque la funzione.

E' definita su tutto R ed è sempre continua e derivabile. Si tratta di una funzione dispari perché $f(-x)=\frac{1}{2}(e^{-ax}-e^{ax})=-\frac{1}{2}(e^{ax}-e^{-ax})=-f(x)$: il grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani.

Intersezioni con gli assi:

Se $x=0$, $y=0$. Se $y=0$, $\frac{1}{2}(e^{ax}-e^{-ax})=0$: $e^{ax}=e^{-ax}$, $ax=-ax$, $2ax=0$, $x=0$.

Segno della funzione:

$$\frac{1}{2}(e^{ax}-e^{-ax})>0,\qquad e^{ax}>e^{-ax},\qquad ax>-ax>,2ax>0\ \ per\ x>0\ (ricordiamo\ che\ a>0):$$

quindi la funzione è positiva per $x>0$ e negativa per $x<0$.

Limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}(e^{ax}-e^{-ax})=+\infty,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}(e^{ax}-e^{-ax})=-\infty$$

Non ci sono asintoti verticali né orizzontali. Verifichiamo che non ci sono neanche asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}(e^{ax}-e^{-ax})\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}(e^{ax})\cdot\frac{1}{x}=+\infty\ \ (per\ ogni\ a>0).$$

$N.B.\,e^{ax}$ è infinito di ordine superiore rispetto ad x.

In base alla simmetria già evidenziata non può esserci asintoto obliquo neanche per $x\to-\infty$.

Studio derivata prima:

$y'=\frac{1}{2}(ae^{ax}+ae^{-ax}>0\ \ per\ ogni\ x$: la funzione è sempre crescente. Non ci sono estremanti.

Studio derivata seconda:

$$y''=\frac{1}{2}(a^2e^{ax}-a^2e^{-ax})\geq 0\ \ se\ \ e^{ax}\geq e^{-ax}:\ ax\geq -ax\,,\qquad 2ax\geq 0,\qquad x\geq 0.$$

Pertanto il grafico della funzione volge la concavità verso l'alto se $x>0$, verso il basso se $x<0$ ed ha pertanto in $x=0\ \ un\ \ punto\ di\ flesso$: $F=(0;0)$.

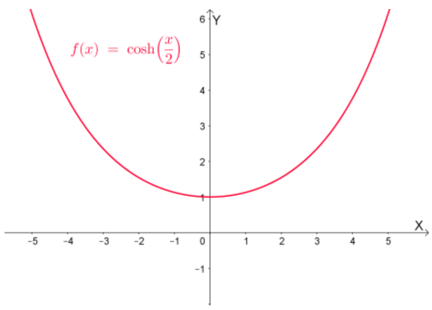
La tangente nel punto di flesso ha coefficiente angolare $f'(0)=a>0$.

Il grafico è simile a quello già indicato, in cui per comodità abbiamo posto $a=\frac{1}{2}$.

Studiamo la seconda funzione:

$$\boldsymbol{y=g_a(x)=\frac{1}{2}(e^{ax}+e^{-ax}),\qquad con\ a>0}$$

(N.B. La funzione in questione è il coseno iperbolico di (ax): $y=cos\,\mathrm{h}(ax)$, detta anche "catenaria" (vedi approfondimento su Wikipedia: Catenaria - Wikipedia) ed il grafico è del tipo $(con\ a=1/2)$):



Studiamo la funzione.

E' definita su tutto R ed è sempre continua e derivabile. Si tratta di una funzione pari perché $g(-x)=\frac{1}{2}(e^{-ax}+e^{ax})=\frac{1}{2}(e^{ax}+e^{-ax})=g(x)$: il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle y.

Intersezioni con gli assi:

Se $x = 0$, $y = 1$ $per\ ogni\ valore\ di\ a$. Se $y = 0$, $\frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax}) = 0$: mai.

$Non\ ci\ sono\ intersezioni\ con\ l'asse\ delle\ x$.

Segno della funzione:

$\frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax}) > 0,\ \ per\ ogni\ x$: quindi la funzione è sempre positiva.

Limiti:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax}) = +\infty$$

Non ci sono asintoti verticali né orizzontali. Verifichiamo che non ci sono neanche asintoti obliqui:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax}) \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}(e^{ax}) \cdot \frac{1}{x} = +\infty$ ($per\ ogni\ a > 0$, e^{ax} è infinito di ordine superiore

rispetto ad x).

In base alla simmetria già evidenziata non può esserci asintoto obliquo neanche per $x \to -\infty$.

Studio derivata prima:

$y' = \frac{1}{2}(ae^{ax} - ae^{-ax} \geq 0\ \ se\ \ e^{ax} \geq e^{-ax}, ax \geq -ax,\ \ 2ax \geq 0, x \geq 0$: la funzione è crescente per $x > 0$ e decrescente per $x < 0$ $ed\ ha\ quindi\ \ in\ \ x = 0$ un punto di minimo relativo (e assoluto), con ordinata uguale ad 1 per ogni valore di a.

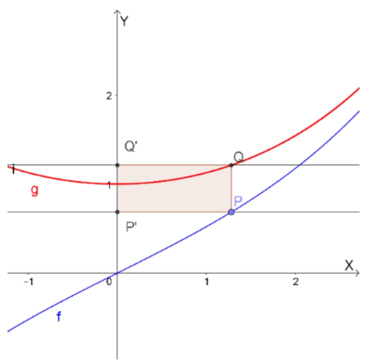
Studio derivata seconda:

$y'' = \frac{1}{2}(a^2e^{ax} + a^2e^{-ax}) > 0\ \ per\ ogni\ x$: pertanto il grafico della funzione volge la concavità sempre verso l'alto, quindi non ci sono flessi.

Il grafico è simile a quello già indicato, in cui per comodità abbiamo posto $a = \frac{1}{2}$.

b)

Siano P e Q due punti, rispettivamente su γ_f e γ_g, aventi la stessa ascissa positiva, P' e Q' le loro proiezioni sull'asse delle ordinate. Si individui il valore del parametro a in corrispondenza del quale la massima area del rettangolo $PQQ'P'$ vale e^{-1}.



Indicata con $x > 0$ l'ascissa di P e Q, le loro ordinate sono rispettivamente: $y_P = \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax})$ e $y_Q = \frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax})$

L'area del rettangolo $PQQ'P'$ è data da:

$A = PP' \cdot PQ = x|y_Q - y_P|$.

Osserviamo che risulta sempre $y_Q > y_P$, infatti:

$\frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax}) > \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax}),\ \ e^{ax} + e^{-ax} > e^{ax} - e^{-ax}$,

$\mathrm{e}^{-\mathrm{ax}} > -\mathrm{e}^{-\mathrm{ax}}$, $2e^{-ax} > 0$ *per ogni* x. Quindi:

$$A = x(\mathrm{y_Q} - \mathrm{y_P}) = x\left(\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{ax}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{ax}}) - \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{ax}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{ax}})\right) = x(e^{-ax}), \qquad con\ x > 0\,.$$

Osserviamo che la funzione area è sempre continua e derivabile nel suo dominio.

Risulta:

$$A' = e^{-ax} - axe^{-ax} \geq 0\ se\ \ 1 - ax \geq 0, x \leq \frac{1}{a} \quad (ricordiamo\ che\ a > 0).$$

Essendo $x > 0$ la funzione è crescente per $0 < x < \frac{1}{a}$ e decrescente per $x > \frac{1}{a}$: $x = \frac{1}{a}$ è punto di massimo relativo e assoluto.

$$A\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}e^{-1} = e^{-1} \quad se \quad a = 1.$$

D'ora in avanti, si assuma $a = 1$.

c)

Verificare l'identità $g^2(x) - f^2(x) = 1$ e determinare il numero intero per cui $50 \leq g(x) - f(x) \leq 100$. Specificare quale, tra $f(x)$ e $g(x)$, è una funzione invertibile in $\mathbb{R}$ e ricavare l'espressione analitica della funzione inversa.

Verifichiamo che $g^2(x) - f^2(x) = 1$.

N.B. Si tratta di una nota proprietà che lega il seno iperbolico al coseno iperbolico dello stesso angolo:

$$\mathrm{Ch}^2\,\mathrm{x}\ - \mathrm{Sh}^2\mathrm{x} = 1$$

Verifichiamola direttamente:

$$g^2(x) - f^2(x) = \left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)^2 = \frac{1}{4}[(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})] =$$
$$= \frac{1}{4}[4] = 1\ \ c.v.d.$$

Veniamo alla seconda domanda del quesito.

$50 \leq g(x) - f(x) \leq 100$, $50 \leq \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \leq 100$; $50 \leq e^{-x} \leq 100$.

Valutiamo e^{-x}, con x che deve essere chiaramente negativo.

Per x=-3 abbiamo $e^3 \cong 20.1$, per x=-4 abbiamo $e^4 \cong 54.6$; per x=-5 abbiamo $e^5 = 148.41$.

Il numero intero per cui $50 \leq g(x) - f(x) \leq 100$ è quindi $x = -4$.

Rispondiamo all'ultima richiesta del quesito. Dai grafici delle due funzioni si deduce chiaramente che la funzione invertibile è quella che corrisponde al seno iperbolico (strettamente monotona), quindi tra f e g la funzione invertibile è $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Ricaviamo l'espressione analitica della sua inversa:

$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$; $2y = \left(e^x - \frac{1}{e^x}\right) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x}$; $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$; $e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$

La soluzione accettabile è $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$, perché e^x è sempre positiva e la soluzione $e^x = y - \sqrt{y^2 + 1}$ è negativa per ogni y, infatti: $y - \sqrt{y^2 + 1} < 0\ \ se\ \sqrt{y^2 + 1} > y$ e questa disequazione è sempre verificata (se $y < 0\ verificata,\ \ se\ y \geq 0\ elevando\ al\ quadrato$: $y^2 + 1 > y^2\ sempre$).

Quindi:

$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$; $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) = f^{-1}$

(N.B. Questa funzione è l'arcoseno iperbolico, che si indica con arcsinh).

La funzione inversa di $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ è la funzione $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

d)

Determinare l'equazione $y = P(x)$ della parabola γ avente il vertice nel punto di minimo assoluto della funzione $g(x)$ e retta tangente, per $x = 1$, parallela alla retta di equazione $2x + y = 0$. Calcolare l'area della regione finita R delimitata da γ, dal grafico di $g(x)$ e dalle rette di equazione $x = \pm 1$. Verificare che l'area di R può essere approssimata con quella del triangolo isoscele inscritto nel segmento parabolico delimitato da γ e dall'asse delle ascisse.

$y = P(x)$: parabola γ con vertice $V = (0; 1)$, asse parallelo all'asse y, tangente in

$x = 1$ parallela a $2x + y = 0$ $(\boldsymbol{che\ ha\ coefficiente\ anhgolare\ m = -2})$

La parabola è del tipo: $y = ax^2 + bx + c$.

La parabola di dato vertice $V = (x_V; y_V)$ può essere scritta nella forma:

$y - y_V = a(x - x_V)^2$.

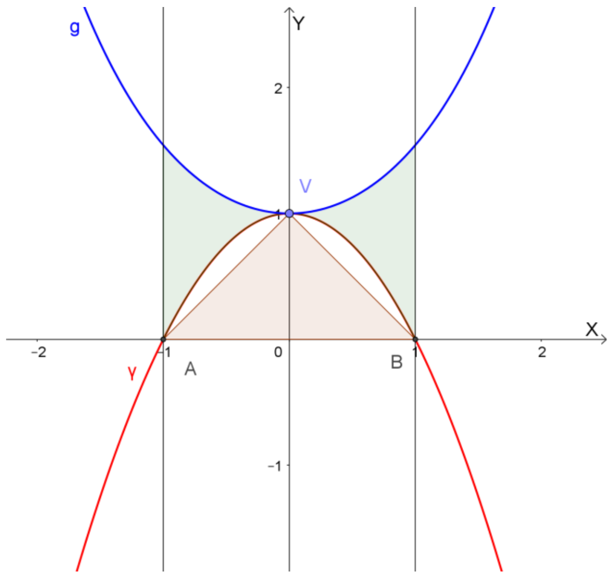
Nel nostro vaso: $y - 1 = ax^2$, $y = ax^2 + 1$. La tangente in x=1 deve avere coefficiente angolare

-2 (quello della retta data), quindi $y'(1) = -2$. Ma $y'(x) = 2ax,\ quindi\ y'(1) = -2 = 2a$,

$a = -1$.

La parabola richiesta ha equazione: γ: $y = -x^2 + 1$.

Rappresentiamo graficamente il grafico della parabola, della funzione g, della regione R e del triangolo:



$$Area(R) = 2\int_0^1 \left[\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - (-x^2 + 1)\right] dx = 2\left[\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{3}x^2 - x\right]_0^1 =$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{3} - 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\right] = e - e^{-1} - \frac{4}{3} \cong 1.02 = Area(R) \cong 1$$

L'area del triangolo ABV vale: $\frac{1}{2}(2)(1) = 1.$

Quindi : $Area(R) \cong Area(triangolo).$

Con la collaborazione di Angela Santamaria