LICEO SCIENTIFICO STRAORDINARIA 2023 - QUESTIONARIO

QUESITO 1

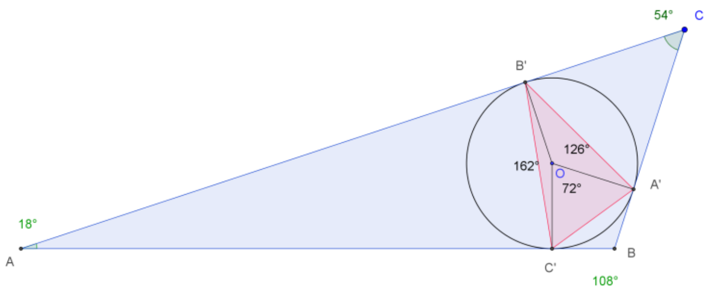
Nel triangolo ABC, l'ampiezza di uno dei tre angoli è la metà di un secondo angolo del triangolo ed è pari al triplo del terzo angolo. Detti A', B', C' i punti di tangenza tra i lati di ABC ed il suo cerchio inscritto, determinare le ampiezze degli angoli del triangolo A'B'C'.

Indicata con x l'ampiezza del più piccolo degli angoli, il secondo sarà 3x ed il terzo 6x, quindi:

$$x + 3x + 6x = 180°, \;\; 10x = 180°, \qquad x = 18°$$

Gli angoli quindi misurano: $18°, 54°, 108°$.

Consideriamo ora la circonferenza inscritta in ABC ed il triangolo A'B'C' che ha per vertici i punti di tangenza.



Per una nota proprietà della circonferenza, essendo CB' e CA' segmenti di tangenti condotte da un punto esterno, l'angolo (convesso) A'OB' è supplementare dell'angolo ABC, quindi misura $180° - 54° = 126°$. L'angolo A'C'B' è un angolo alla circonferenza che ha il suddetto angolo come corrispondente angolo al centro, quindi è uguale alla sua metà. Pertanto la misura dell'angolo A'C'B' è 63°.
In modo analogo si ragiona per trovare gli altri due angoli del triangolo A'B'C'.
L'angolo (convesso) B'OC' misura 180°-18°=162°, perciò l'angolo B'A'C' misura 81°.
L'angolo (convesso) A'OC' misura 180°-108°=72°, perciò l'angolo A'B'C' misura 36°.

QUESITO 2

Una classe è formata da 18 studenti; durante la lezione di musica, vengono creati (in modo completamente casuale) tre gruppi formati rispettivamente da 5, 6 e 7 studenti. Se Alice, Barbara e Chiara sono tre studentesse della classe, determinare la probabilità che solo due di loro facciano parte di uno stesso gruppo.

Il numero dei possibili gruppi formati da 5 studenti è dato dalle combinazioni semplici di 18 oggetti a 5 a 5:

$$C_{18,5} = \binom{18}{5} = \frac{18!}{5!\,13!} = 8568$$

Il numero dei gruppi con solo due fra le tre studentesse è dato dalle combinazioni di 15 oggetti (18 - le due studentesse che appartengono al gruppo - la terza studentessa che non può stare in gruppo con le altre due) a 3 a 3 moltiplicato per 3 (le coppie con solo due fra le tre studentesse sono 3: Alice e Barbara, Alice e Chiara, Barbara e Chiara):

$$C_{15,3} = \binom{15}{3} = \frac{15!}{3!\,12!} = 455$$

I gruppi da 5 favorevoli sono quindi: $455x3 = 1365$

Quindi la probabilità $p(5)$ che solo due fra le tre studentesse facciano parte di un gruppo da 5 è pari a:

$$p(5) = \frac{1365}{8568} \cong = 0.1593$$

Il numero dei possibili gruppi formati da 6 studenti è dato dalle combinazioni semplici di 18 oggetti a 6 a 6:

$$C_{18,6} = \binom{18}{6} = \frac{18!}{6!\,12!} = 18564$$

Il numero dei gruppi da 6 con solo due fra le tre studentesse è dato dalle combinazioni di 15 oggetti (18 - le due studentesse che appartengono al gruppo - la terza studentessa che non può stare in gruppo con le altre due) a 4 a 4 moltiplicato per 3 (le coppie con solo due fra le tre studentesse sono 3: Alice e Barbara, Alice e Chiara, Barbara e Chiara):

$$C_{15,4} = \binom{15}{4} = \frac{15!}{4!\,11!} = 1365$$

I gruppi da 6 favorevoli sono quindi: $1365x3 = 4095$

Quindi la probabilità $p(6)$ che solo due fra le tre studentesse facciano parte di un gruppo da 6 è pari a:

$$p(6) = \frac{4095}{18564} \cong 0.2206$$

Il numero dei possibili gruppi formati da 7 studenti è dato dalle combinazioni semplici di 18 oggetti a 7 a 7:

$$C_{18,7} = \binom{18}{7} = \frac{18!}{7!\,11!} = 31824$$

Il numero dei gruppi da 7 con solo due fra le tre studentesse è dato dalle combinazioni di 15 oggetti (18 - le due studentesse che appartengono al gruppo - la terza studentessa che non può stare in gruppo con le altre due) a 5 a 5 moltiplicato per 3 (le coppie con solo due fra le tre studentesse sono 3: Alice e Barbara, Alice e Chiara, Barbara e Chiara):

$$C_{15,5} = \binom{15}{5} = \frac{15!}{5!\,10!} = 3003$$

I gruppi da 7 favorevoli sono quindi: $3003x3 = 9009$

Quindi la probabilità $p(7)$ che solo due fra le tre studentesse facciano parte di un gruppo da è pari a:

$$p(7) = \frac{9009}{31824} \cong 0.2831$$

La probabilità che solo 2 fra le tre studentesse facciano parte dello stesso gruppo è quindi data da:

$$p = p(5) + p(6) + p(7) = \frac{1365}{8568} + \frac{4095}{18564} + \frac{9009}{31824} = \frac{541}{816} \cong 0.663 = 66.3\ \%$$

QUESITO 3

Assegnate le rette

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + 4t \end{cases}, \quad s: \begin{cases} x = 1 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$$

con t parametro reale, determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente r e parallelo ad s.

Il vettore della retta r è dato da $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, 4)$. Per trovare il vettore della retta s scriviamola in forma parametrica:

$$s: \begin{cases} x = 1 \\ y = k \\ z = -3 + 2k \end{cases} \quad : \quad \overrightarrow{v_s} = (0, 1, 2).$$

Il generico piano ha equazione: $ax + by + cz + d = 0$.
Questo piano contiene r se: $a(1 + t) + b(t) + c(1 + 4t) + d = 0$ $per\ ogni\ valore\ di\ t$, quindi:
$t(a + b + 4c) + a + c + d = 0\ \ per\ ogni\ t$
Per il principio di identità dei polinomi dovrà quindi essere: $a + b + 4c = 0\ \ e\ \ a + c + d = 0$.
Il piano è parallelo ad s se: $a(0) + b(1) + c(2) = 0,\ \ b + 2c = 0$.
I coefficienti a, b, c e d del piano si ottengono risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} a + b + 4c = 0 \\ a + c + d = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases}; \begin{cases} a + b + 4c = 0 \\ a + c + d = 0 \\ b = -2c \end{cases}; \begin{cases} a - 2c + 4c = 0 \\ a + c + d = 0 \\ b = -2c \end{cases}; \begin{cases} a = -2c \\ -2c + c + d = 0 \\ b = -2c \end{cases}; \begin{cases} a = -2c \\ d = c \\ b = -2c \end{cases}$$

Quindi il piano ha equazione:

$$-2cx - 2cy + cz + c = 0$$

$$(dividendo\ per\ c, che\ non\ può\ essere\ nullo\ altrimenti\ sarebbero\ nulli\ anche\ a, b\ e\ d)$$

$$-2x - 2y + z + 1 = 0, \quad 2x + 2y - z - 1 = 0$$

Metodo alternativo:

Il piano richiesto appartiene al fascio di piani contenenti r. Scriviamo r come intersezione di due piani:

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + 4t \end{cases}; \begin{cases} x = 1 + y \\ y = k \\ z = 1 + 4y \end{cases}; \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 4y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Il fascio di piani di sostegno r ha equazione del tipo:

$$x - y - 1 + h(4y - z + 1) = 0, \qquad x + (4h - 1)y - hz - 1 + h = 0$$

Questo piano è parallelo ad s se il prodotto scalare fra il vettore della sua normale ed il vettore di s è nullo:

$$0(1) + 1(4h - 1) + 2(-1 + h) = 0, \qquad 6h - 3 = 0, \qquad h = \frac{1}{2}.$$

Il piano richiesto ha quindi equazione:

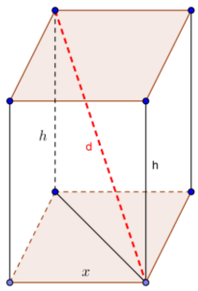
$x+\left(\frac{4}{2}-1\right)y-\frac{1}{2}z-1+\frac{1}{2}=0$, $\quad x+y-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}=0$, $\quad 2x+2y-z-1=0$

QUESITO 4

Tra tutti i parallelepipedi rettangoli a base quadrata di diagonale fissata d, dimostrare che il cubo è quello di volume massimo.

Anche se non è chiaro, pensiamo che d sia la diagonale del parallelepipedo (se fosse la diagonale del quadrato di base non esisterebbe il volume massimo).

Indichiamo con x il lato del quadrato di base, con d la diagonale del parallelepipedo e con h l'altezza del parallelepipedo (notiamo che $0<x<d$).



Risulta:

$$d=\sqrt{x^2+x^2+h^2}=\sqrt{2x^2+h^2}\ \ da\ cui \quad d^2=2x^2+h^2,\ \ h^2=d^2-2x^2$$

Il volume del parallelepipedo è dato da:

$V=x\cdot x\cdot h=x^2\cdot h$; V è massimo se lo è $V^2=x^4\cdot h^2=x^4\cdot(d^2-2x^2)=y$

Il massimo può essere cercato con il metodo delle derivate, ma preferiamo proporre la soluzione per via elementare, meno usata.

$y=x^4\cdot(d^2-2x^2)=\frac{1}{4}(2x^2)^2\cdot(d^2-2x^2)$ che è massima se lo è:

$(2x^2)^2\cdot(d^2-2x^2)$

Si tratta del prodotto di due potenze la cui somma delle basi è costante ($2x^2+d^2-2x^2=d^2$); tale espressione è massima se le basi sono proporzionali agli esponenti, quindi:

$$\frac{2x^2}{2}=\frac{d^2-2x^2}{1}\quad da\ cui:\ 6x^2=2d^2,\ \ x^2=\frac{1}{3}d^2,\ \ x=\frac{\sqrt{3}}{3}d.$$

Per tale valore di x l'altezza risulta: $h=\sqrt{d^2-2x^2}=\sqrt{d^2-\frac{2}{3}d^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}d=x$

Il parallelepipedo di volume massimo è quindi il cubo di spigolo $x=\frac{\sqrt{3}}{3}d$.

Secondo metodo (con le derivate).

$V = x \cdot x \cdot h = x^2 \cdot h$; V è massimo se lo è $V^2 = x^4 \cdot h^2 = x^4 \cdot (d^2 - 2x^2) = y$

$y' = 4x^3(d^2 - 2x^2) + x^4(-4x) > 0 \;\; se \;\; 4(d^2 - 2x^2) - 4x^2 > 0 \;\; (ricordiamo\ che\ 0 < x < d)$

$d^2 - 2x^2 - x^2 > 0, \; -3x^2 + d^2 > 0\,, \; x^2 < \frac{d^2}{3} \;\; , \;\; 0 < x < \sqrt{\frac{d^2}{3}}\,.$

La funzione è quindi crescente per $0 < x < \sqrt{\frac{d^2}{3}}$ e decrescente per $\sqrt{\frac{d^2}{3}} < x < d$.

Siccome per $x \to 0^+$ il volume tende a zero, $x = \sqrt{\frac{d^2}{3}}$ è punto di massimo relativo e assoluto.

Il volume è quindi massimo se $x = \sqrt{\frac{d^2}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}d$.

Per tale valore di x si ha: $h = \sqrt{d^2 - 2x^2} = \sqrt{d^2 - \frac{2}{3}d^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}d = x$.

Il parallelepipedo di volume massimo è quindi il cubo di spigolo $x = \frac{\sqrt{3}}{3}d$.

QUESITO 5

Determina l'equazione della funzione dispari che ha un solo flesso a tangente orizzontale e la cui derivata seconda è $f'' = -10x^3 + 12x$.

Risulta:

$$f'(x) = \int (-10x^3 + 12x)\; dx = -\frac{5}{2}x^4 + 6x^2 + c$$

$f(x) = \int \left(-\frac{5}{2}x^4 + 6x^2\right)\, dx = -\frac{1}{2}x^5 + 2x^3 + cx + k.$

Siccome f'' è dispari [$f''(-x) = 10x^3 - 12x = -f(''x)$], f' sarà pari e quindi f dispari, perciò

$k = 0, \big(perchè\ f(-x) = f(x)\big)$.

Allora: $f(x) = -\frac{1}{2}x^5 + 2x^3 + cx$.

Siccome la funzione (continua e derivabile quanto si vuole su tutto R) ha UN SOLO PUNTO DI FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE esso è una soluzione di $f''(x) = -10x^3 + 12x = 0$. Questa equazione si annulla in $x = 0 \;\; e \;\; x = \pm\sqrt{\frac{6}{5}}$.

Ma la funzione ha un solo **flesso a tangente orizzontale**, quindi deve essere anche $f'(0) = 0$.

Per essere $f'(0) = 0$ si deve avere $c = 0$.

Verifichiamo che negli altri due punti che annullano la derivata seconda (altri possibili flessi) risulta $f'\left(\pm\sqrt{\frac{6}{5}}\right) \neq 0$. Con $c = 0$ si ha: $f'(x) = -\frac{5}{2}x^4 + 6x^2$.

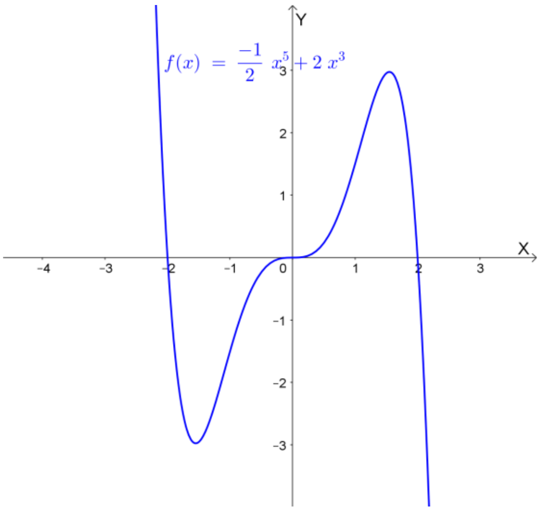
Ed è: $f'\left(\pm\sqrt{\frac{6}{5}}\right) = -\frac{5}{2}\left(\frac{36}{25}\right) + 6\left(\frac{6}{5}\right) = -\frac{18}{5} + \frac{36}{5} = \frac{18}{5} \neq 0$.

Osserviamo infine che $f'''(x) = -30x^2 + 12$ ed è $f'''(0) = 12 \neq 0$, quindi effettivamente $x = 0$ è un punto di flesso. Invece $f'''\left(\pm\sqrt{\frac{6}{5}}\right) = -30\left(\frac{6}{5}\right) + 12 = -36 + 12 = -24 \neq 0$: quindi anche $x = \pm\sqrt{\frac{6}{5}}$ sono punti di flesso, ma non a tangente orizzontale.

In conclusione la funzione richiesta ha un solo flesso a tangente orizzontale se:

$f(x) = -\frac{1}{2}x^5 + 2x^3$.

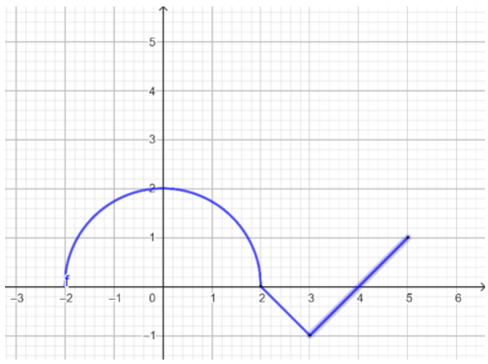
Anche se non richiesto forniamo un grafico qualitativo della funzione



QUESITO 6

Si consideri la funzione $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\,dt$ *con* $x \in [-2; 5]$, *dove* f *è la funzione rappresentata in figura, ottenuta dall'unione di una semicirconferenza e due segmenti.*

Calcolare $F(-2), F(2), F(3)$ *e* $F(5)$.



$$F(-2) = \int_{-2}^{-2} f(t)\,dt = 0 = F(-2)$$
$$F(2) = \int_{-2}^{2} f(t)\,dt = area\ del\ semicerchio\ di\ raggio\ 2 = \frac{1}{2}(\pi R^2) = \frac{1}{2}\pi(4) = 2\pi = F(2)$$
$$F(3) = \int_{-2}^{3} f(t)\,dt = area\ semicerchio - area\ triangolo\ di\ base\ 1\ e\ altezza\ 1 = 2\pi - \frac{1}{2} = F(3)$$
$$F(5) = \int_{-2}^{5} f(t)\,dt = \int_{-2}^{3} f(t)\,dt + \int_{3}^{5} f(t)\,dt = 2\pi - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2\pi - \frac{1}{2} = F(5)$$

QUESITO 7

Determinare il dominio della funzione $f(x) = \frac{x\,|x+1|}{x^3-x}$ *e stabilire la tipologia delle sue discontinuità.*

Il dominio della funzione si ottiene ponendo $x^3 - x \neq 0$ $quindi$: $x \neq 0$ e $x \neq \pm 1$.

La funzione è quindi discontinua per $x = 0, x = -1, x = 1$.

Analizziamo la tipologia delle discontinuità.

Analizziamo $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,|x+1|}{x^3-x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,(x+1)}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(x-1)} = -1 : \quad x = 0\ discontinuità\ di\ terza\ specie\ (eliminabile)$$

Analizziamo $x = -1$.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x\,|x+1|}{x^3-x} = \lim_{x\to -1} \frac{x\,|x+1|}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{|x+1|}{(x-1)(x+1)} = \pm \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \pm \lim_{x\to -1} \frac{1}{(x-1)} = \mp \frac{1}{2}$$

Quindi $x = -1$ è un punto di discontinuità di prima specie, con salto 1: $salto = |l^+ - l^-| = \left|-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right| = 1$

Analizziamo $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x\,|x+1|}{x^3-x} = \lim_{x\to 1} \frac{x\,(x+1)}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)} = \infty$$

Quindi $x = 1$ è un punto di discontinuità di seconda specie.

QUESITO 8

Si considerino le seguenti affermazioni sulla funzione y=f(x).

A: "f(x) è derivabile per $x = x_0$*"*
B: "f(x) è continua per $x = x_0$*"*

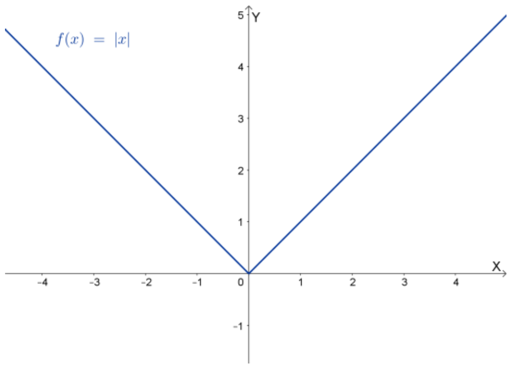
Indicare quali, tra le seguenti affermazioni, non costituisce un teorema. Spiegare la scelta effettuata anche attraverso opportuni controesempi.

1. $A \Longrightarrow B$ $\quad (Se\ A\ allora\ B)$
2. $B \Longrightarrow A$ $\quad (se\ B\ allora\ A)$
3. $A \Leftrightarrow B$ $\quad (B\ se\ e\ solo\ se\ A)$

In base ad un noto teorema se una funzione è derivabile in un punto è ivi continua ma non è detto il viceversa: quindi l'implicazione corretta è la 1.

Diamo un esempio di funzione continua ma non derivabile (ciò è sufficiente per dire che le affermazioni 2 e 3 sono false).

Consideriamo la semplice funzione di equazione $y = f(x) = |x|$, il cui grafico è il seguente:



Come si vede facilmente dal grafico la funzione è continua in $x = 0$ ma non è derivabile (abbiamo un punto angoloso).

Con la collaborazione di Angela Santamaria