LICEO SCIENTIFICO SUPPLETIVA 2023 - PROBLEMA 1

Assegnata la funzione: $f(x) = a\, x\, ln\, x - \frac{3}{2}x$

a)

Determinare il valore del parametro reale a in modo che f abbia un punto di minimo assoluto in $x = \sqrt{e}$.
Si studi la funzione ottenuta e se ne disegni il grafico.
Si ponga, d'ora in avanti, $a = 1$.

$\boldsymbol{f(x) = a\, x\, ln\, x - \frac{3}{2}x}$

La funzione è definita per x>0 e per tali valori è continua e derivabile, perciò deve essere $f'(\sqrt{e}) = 0$.
$f'(x) = a\, ln\, x + a\, x\frac{1}{x} - \frac{3}{2}$; $f'(\sqrt{e}) = a \cdot \frac{1}{2} + a - \frac{3}{2} = 0,\quad \frac{3}{2}a = \frac{3}{2}$: $a = 1$
Per tale valore di a si ottiene la funzione equazione:
$\boldsymbol{f(x) = x\, ln\, x - \frac{3}{2}x}$
Verifichiamo che $x = \sqrt{e}$ è effettivamente un punto di minimo assoluto.
Dominio: $x > 0$
$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - \frac{3}{2} = \ln x - \frac{1}{2}$
$f'(x) > 0\ \ se\!: \ln x > \frac{1}{2}:\ \ x > \sqrt{e}.$
La funzione è quindi decrescente se $0 < x < \sqrt{e}$ e crescente per $x > \sqrt{e}$: $x = \sqrt{e}$ è punto di minimo relativo (e assoluto).

Studiamo ora la funzione.

Dominio: $x > 0$
La funzione, come già detto, è continua e derivabile in tutto il suo dominio e non può essere né pari né dispari (visto il dominio).
Intersezioni con gli assi:
non ci possono essere intersezioni con l'asse y, essendo x>0;
se $y = 0, si\ ha\!: x\, ln\, x - \frac{3}{2}x = 0, \ln x = \frac{3}{2}, x = e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3} = e\sqrt{e} \cong 4.5$
Segno della funzione: $f(x) > 0\ se\ \ x\, ln\, x - \frac{3}{2}x > 0\ ,\ ed\ essendo\ x > 0\!:\ ln\, x - \frac{3}{2} > 0,\ \ x > \sqrt{e^3}$
Limiti alla frontiera del dominio:

$\lim_{x\to 0^+}\left(x\, ln\, x - \frac{3}{2}x\right) = 0\ \ \left(ricordiamo\ che\!:\ \lim_{x\to 0^+}(x\, ln\, x) = 0^-\right)$
$\lim_{x\to +\infty}\left(x\, ln\, x - \frac{3}{2}x\right) = +\infty$
$\left(si\ ha\ la\ forma\ indeterminata + \infty - \infty\ ma\ x\, ln\, x\ \text{è}\ infinito\ di\ ordine\ superiore\ rispetto\ a\ \frac{3}{2}x\right)$

Controlliamo se ci può essere asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)=+\infty: \quad non\ c'è\ asintoto\ obliquo\,.$$

Studio derivata prima:

$$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-\frac{3}{2}=\ln x-\frac{1}{2}$$

$f'(x)>0\ \ se\colon \ln x>\frac{1}{2}:\ \ x>\sqrt{e}.$

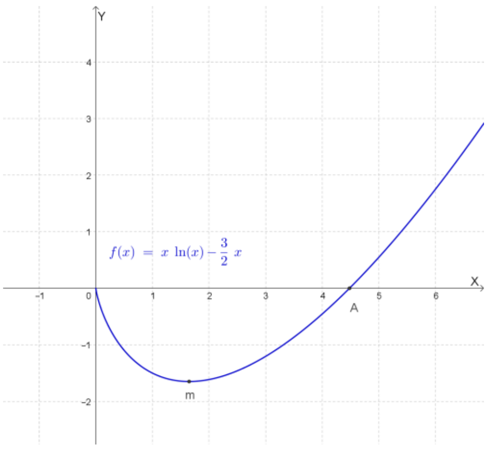
La funzione è quindi decrescente se $0<x<\sqrt{e}$ e crescente per $x>\sqrt{e}$: $x=\sqrt{e}$ è punto di minimo relativo (e assoluto). Ordinata del minimo: $f(\sqrt{e})=\sqrt{e}\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{e}=-\sqrt{e}$: $m=(\sqrt{e};\ -\sqrt{e})$.

Osserviamo che: $\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)=-\infty$, quindi il grafico della funzione si avvicina all'origine degli assi con tangente verticale.

Studio derivata seconda:

$f''(x)=\frac{1}{x}>0$: il grafico della funzione volge sempre la concavità verso l'alto, non ci sono flessi.

Grafico:



b)

Si verifichi che esiste una sola retta tangente t alla curva di equazione $y=f(x)$, condotta dal punto $Q(0,-1)$. Determinare l'equazione di t e le coordinate del corrispondente punto di tangenza.

Generica retta per Q: $y+1=mx\,,\ \ y=mx-1=r(x)$

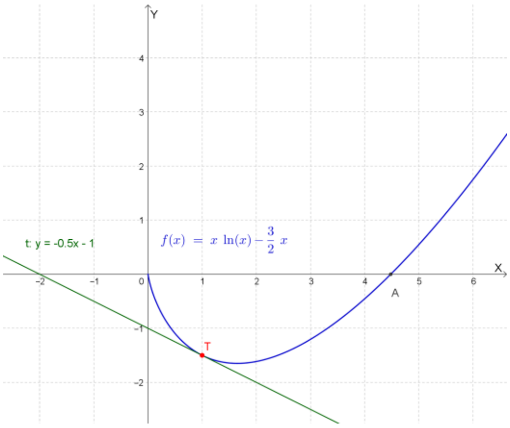
Tale retta è tangente al grafico di f se:

$$\begin{cases} f(x)=r(x)\\ f'(x)=r'(x)\end{cases},\qquad \begin{cases} x\ln x-\frac{3}{2}x=mx-1\\ \ln x-\frac{1}{2}=m\end{cases}\ :\ x\ln x-\frac{3}{2}x=\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)x-1:\ -\frac{3}{2}x=-\frac{1}{2}x-1$$

Dal sistema si ottiene $x=1\ ed\ m=-\frac{1}{2}$: $retta\ tangente\ t\colon y=-\frac{1}{2}x-1$; $perciò\ y=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$.

$Punto\ di\ tangenza\colon\ T=\left(1;\ -\frac{3}{2}\right).$

Rappresentazione grafica:



c)

Determinare i parametri reali h, k in modo che le curve di equazioni $y = f(x)$ e $y = \frac{x+h}{x+k} = s(x)$ risultino tangenti nel loro punto comune di ascissa 1.

$f(x) = x \ln x - \frac{3}{2}x,\ quindi: f(1) = -\frac{3}{2}.$

Il punto comune ad f ed s è quindi: $T = \left(1;\ -\frac{3}{2}\right)$. Deve pertanto essere: $s(1) = -\frac{3}{2}$ perciò:

$\frac{1+h}{1+k} = -\frac{3}{2}$, $\quad 2 + 2h = -3 - 3k$, $\quad 2h + 3k = -5$.

Dobbiamo ora imporre che sia: $f'(1) = s'(1)$. Ricordiamo che: $f'(x) = \ln x - \frac{1}{2}$. Calcoliamo s':

$s'(x) = \frac{x+k-x-h}{(x+k)^2} = \frac{k-h}{(x+k)^2}$; $s'(1) = \frac{k-h}{(1+k)^2} = f'(1) = -\frac{1}{2}$, *da cui*:

$\frac{k-h}{(1+k)^2} = -\frac{1}{2}$, $\quad 2k - 2h = -1 - 2k - k^2$, $\quad k^2 + 4k + 1 - 2h = 0$.

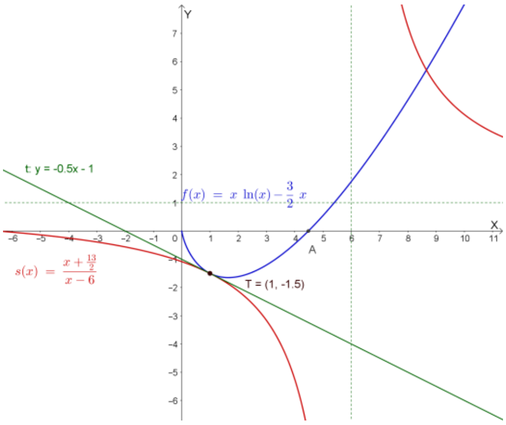
$$\begin{cases} 2h + 3k = -5 \\ k^2 + 4k + 1 - 2h = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} h = \frac{-5-3k}{2} \\ k^2 + 4k + 1 - 2\left(\frac{-5-3k}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow k^2 + 7k + 6 = 0:\ k = -6, \quad k = -1$$

Se $k = -1$ si ha: $h = -1$, $y = \frac{x+h}{x+k} = y = \frac{x-1}{x-1} = 1\ (con\ x \neq 1)$:
non accettabile perchè il punto comune alle due curve ha ascissa 1.

Se $k = -6$ si ha: $h = \frac{13}{2}$, $y = \frac{x+\frac{13}{2}}{x-6}$.

Quindi i valori di h e k richiesti sono: $h = \frac{13}{2}$ *e* $k = -6$.

Anche se non richiesto rappresentiamo graficamente le due funzioni, dopo aver notato che $s(x)$ è una funzione omografica di centro $(6; 1)$, asintototi: $x = 6$ *e* $y = 1$, grafico passante per $T = \left(1;\ -\frac{3}{2}\right)$.



d)

Studiare la funzione

$$g(x) = \int_1^x f(t)\,dt$$

dopo averne scritta l'espressione analitica. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel suo punto di ascissa $x = e$.

$$g(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x \left(t\,ln\,t - \frac{3}{2}t\right)dt$$

Cerchiamo una primitiva di $t\,ln\,t$ integrando per parti:

$$\int t\,ln\,t\,dt = \int \left(\frac{t^2}{2}\right)' ln\,t\,dt = \frac{t^2}{2}\,ln\,t - \int \frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}t^2\ln t - \frac{1}{4}t^2 + c$$

Quindi:

$$\int_1^x \left(t\,ln\,t - \frac{3}{2}t\right)dt = \left[\frac{1}{2}t^2\ln t - \frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{4}t^2\right]_1^x = \left[\frac{1}{2}t^2\ln t - t^2\right]_1^x = \frac{1}{2}x^2\ln x - x^2 - (-1):$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2\ln x - x^2 + 1$$

Studio della funzione.

Dominio: x>0; né pari né dispari, non può intersecare l'asse y (essendo x>0); intersezioni con l'asse x: $\frac{1}{2}x^2\ln x - x^2 + 1 = 0,\ \frac{1}{2}x^2\ln x = x^2 - 1$: sicuramente abbiamo la soluzione x=1, perché per tale valore gli estremi dell'integrale che definiscono g sono uguali. Per altre eventuali intersezioni con l'asse x e per lo studio del segno della funzione si potrebbe ricorrere al metodo grafico, ma aspettiamo lo studio della derivata prima, che probabilmente ci fornirà delle informazioni al riguardo.

Limiti:

$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2}x^2\ln x - x^2 + 1\right) = 1$ (ricordiamo che $\lim_{x\to 0^+} x^a \ln^b x = 0\ \ \forall a > 0\ e\ b > 0$).

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x^2\ln x-x^2+1\right)=+\infty$$

(ci sarebbe la F.I. $+\infty-\infty$ ma $\frac{1}{2}x^2\ln x$ è infinito di ordine superiore rispetto a x^2).
Verifichiamo se c'è asintoto obliquo. Si può subito dire che non c'è perché $per\ x\to+\infty$, per quanto notato sopra, la parte principale della funzione è $\frac{1}{2}x^2\ln x$, che è un infinito di ordine superiore a 1, mentre è necessario che sia un infinito di ordine 1, dovendo essere: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}x^2\ln x-x^2+1}{x}\right)=m\neq 0$. In effetti si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}x^2\ln x-x^2+1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x\ln x-x+\frac{1}{x}\right)=+\infty\,.$$

N.B. Per un approfondimento sugli asintoti di una funzione si veda questa pagina di matefilia.it:

https://www.matefilia.it/argomen/asintoti/asintoti.htm

Studio derivata prima:

Per il Teorema di fondamentale del calcolo integrale si ha: $g'(x)=f(x)=x\,ln\,x-\frac{3}{2}x$.
Risulta: $g'(x)\geq 0\ se\ x\,ln\,x-\frac{3}{2}x\geq 0,\ x\left(ln\,x-\frac{3}{2}\right)\geq 0$ se $ln\,x-\frac{3}{2}\geq 0\ (ricordiamo\ che\ x>0)$
$ln\,x\geq\frac{3}{2}\ ,\ x\geq e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$. Pertanto:

se $0<x<\ e\sqrt{e}$ la funzione è decrescente
se $x=\ e\sqrt{e}$ la derivata si annulla (punto stazionario)
se $x>\ e\sqrt{e}$ la funzione è crescente

Concludiamo che $x=\ e\sqrt{e}$ è punto di minimo relativo (e anche assoluto) che vale:
$g(e\sqrt{e})=\left(\frac{1}{2}x^2\ln x-x^2+1\right)_{x=\sqrt{e^3}}=\frac{1}{2}e^3\cdot\frac{3}{2}-e^3+1=1-\frac{1}{4}e^3\cong-4.0$.

Calcoliamo il coefficiente angolare della tangente lungo la quale il grafico si avvicina al punto $(0;1)$:
$\lim_{x\to0^+}(g'(x))=\lim_{x\to0^+}\left(x\,ln\,x-\frac{3}{2}x\right)=0$: *tangente di avvicinamento orizzontale.*
Il minimo relativo (e assoluto) ha quindi coordinate: $m=\left(e\sqrt{e};\ 1-\frac{1}{4}e^3\right)$.

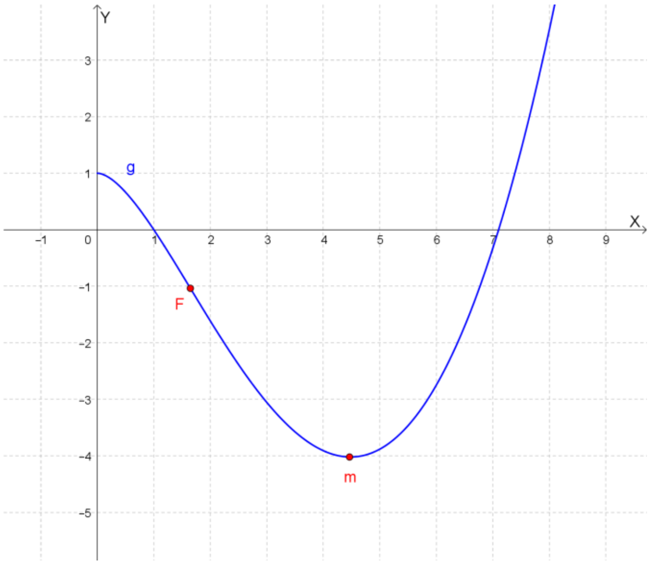
Osserviamo che il calcolo dei limiti e lo studio della derivata prima ci consentono di dire che il grafico della funzione interseca l'asse delle x, oltre che in 1, in un altro (solo) punto di ascissa maggiore di $e\sqrt{e}$.

Studio derivata seconda:

$g'(x)=x\,ln\,x-\frac{3}{2}x\ ,\ g''(x)=\ln x+1-\frac{3}{2}=\ln x-\frac{1}{2}\geq 0\ \ se\ \ln x\geq\frac{1}{2}\ \ ,\ x\geq\sqrt{e}.$
Se $0<x<\sqrt{e}$: concavità verso il basso
Se $x>\sqrt{e}$: concavità verso l'alto.

$x=\sqrt{e}$ punto di flesso con ordinata $g(\sqrt{e})=\left(\frac{1}{2}x^2\ln x-x^2+1\right)_{x=\sqrt{e}}=\frac{1}{2}e\cdot\frac{1}{2}-e+1=1-\frac{3}{4}e\cong-1$:
Flesso: $F=\left(\sqrt{e};1-\frac{3}{4}e\right)$.

Il grafico della funzione $g(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - x^2 + 1$ è quindi il seguente:



Determiniamo ora l'equazione della retta tangente al grafico di g nel suo punto di ascissa x = e.

$g(e) = \frac{1}{2}e^2 - e^2 + 1 = 1 - \frac{1}{2}e^2$: $P = \left(e;\ 1 - \frac{1}{2}e^2\right)$

$g'(e) = f(e) = e - \dfrac{3}{2}e = -\dfrac{1}{2}e.$

La tangente richiesta ha quindi equazione:

$y - 1 + \dfrac{1}{2}e^2 = -\dfrac{1}{2}e(x - e)\,, \qquad y = \left(-\dfrac{1}{2}e\right)x + 1\,.$

Con la collaborazione di Angela Santamaria