LICEO SCIENTIFICO SUPPLETIVA 2023 - PROBLEMA 2

Sono assegnate due funzioni polinomiali $y = P(x)$ e $y = Q(x) = kP(x)$, con k parametro reale, i cui grafici rappresentativi sono mostrati in figura in fondo al problema.
È noto che:
- $P''(x) = 12x^2 - 24x$
- *hanno entrambe nell'origine degli assi un flesso a tangente orizzontale*
- *il valore massimo assunto dalla funzione Q è uguale a $\frac{27}{4}$.*

a)

Determinare l'espressione analitica delle funzioni $P(x)$ e $Q(x)$.

Da $P''(x) = 12x^2 - 24x$ ricaviamo: $P'(x) = \int (12x^2 - 24x)\,dx = 4x^3 - 12x^2 + c$
Ma il grafico p della funzione P(x) passa per l'origine ed ha ivi tangente orizzontale, quindi

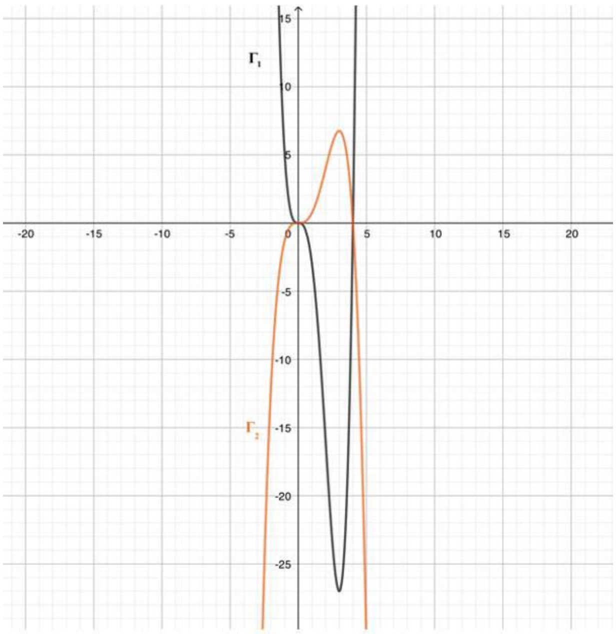
$P'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$P'(x) = 4x^3 - 12x^2$ e perciò: $P(x) = \int (4x^3 - 12x^2)\,dx = x^4 - 4x^3 + c'$; ma $P(0) = 0,\ perciò$ $c' = 0$.

Abbiamo quindi:

$\boldsymbol{P(x) = x^4 - 4x^3}$

Per determinare l'equazione di $y = Q(x) = kP(x)$, osserviamo il grafico fornito in cui sono rappresentati P(x) e Q(x):



Dall'informazione che il grafico di Q ha massimo uguale a $\frac{27}{4}$, deduciamo che il suo grafico è quello in arancione, indicato con Γ_2 . Tale grafico ha segno opposto a quello di P(x), indicato con Γ_1, pertanto, essendo $Q(x) = kP(x)$ deduciamo che $k < 0$ e che l'ascissa del massimo di Q è uguale a quella del minimo di P.
Per trovare il valore di k determiniamo il minimo di P(x). Per far ciò è sufficiente cercare il valore non nullo in cui $P'(x) = 0$.
$P'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 0\ se\ 4x^2(x-3) = 0\ se\ x = 0\ e\ x = 3.$
Il minimo di P(x) è $P(3) = 81 - 108 = -27$.
Ma $Q(3) = k\,P(3)$, quindi: $\frac{27}{4} = k(-27) \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$. Si ha allora:
$\boldsymbol{Q(x) = -\frac{1}{4}(x^4 - 4x^3) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3}$.

b)

Determinare dominio, zeri, segno, estremi e flessi delle funzioni
$y = P(x) \cdot Q(x)\ \ e\ y = \frac{1}{P(x)}$

D'ora in avanti, si assuma che $P(x) = x^4 - 4x^3$.

Dominio di $y = P(x) \cdot Q(x)$: tutto R (perché prodotto di funzioni razionali intere).
Zeri di $y = P(x) \cdot Q(x)$: sono gli zeri di P(x) e di Q(x), come dire di P(x) perché Q(x) si annulla dove si annulla P(x). Ma $P(x) = x^4 - 4x^3 = 0\ \ se\ \ x^3(x-4) = 0:\ \ x = 0\ e\ x = 4$.
Quindi gli zeri di $y = P(x) \cdot Q(x)$ sono: $x = 0\ e\ x = 4$.
Segno di $y = P(x) \cdot Q(x)$: abbiamo già osservato che P(x) e Q(x) si annullano negli stessi punti (x=0 e x=4) e che hanno segno opposto, quindi $y = P(x) \cdot Q(x) < 0\ per\ ogni\ x\ diverso\ da\ 0\ e\ 4$.

Estremi di $y = P(x) \cdot Q(x)$.
Risulta $y = P(x) \cdot Q(x) = kP(x)^2 = -\frac{1}{4}(x^4 - 4x^3)^2$. Studiamo la derivata prima:
$y' = -\frac{1}{2}(x^4 - 4x^3)(4x^3 - 12x^2) = -2x^5(x-4)(x-3) \geq 0\ se\ \ x(x-4)(x-3) \leq 0$. Studiando questa disequazione si ha: $x \leq 0\ vel\ 3 \leq x \leq 4$. Pertanto:

$x < 0: cresce$
$0 < x < 3: decresce$
$3 < x < 4$: cresce
$x > 4: decresce$

Conclusioni sugli estremi di $y = P(x) \cdot Q(x)$:

$x = 0\ punto\ di\ massimo\ relativo, con\ ordinata\ y = 0$
$x = 3\ punto\ di\ minimo\ relativo\ con\ ordinata\ y = P(3)Q(3) = -27\left(\frac{27}{4}\right) = -\frac{729}{4}$
$x = 4\ punto\ di\ massimo\ relativo\ con\ ordinata\ y = P(4) \cdot Q(4) = 0.$

Flessi di $y = P(x) \cdot Q(x)$.

$y'' = D\left(-2x^5(x-4)(x-3)\right) = \cdots = -2x^4(7x^2 - 42x + 60) \geq 0\ se$

$x = 0\ \ vel\ \ \frac{21-\sqrt{21}}{7} \leq x \leq \frac{21+\sqrt{21}}{7}$

Quindi la concavità della funzione è:

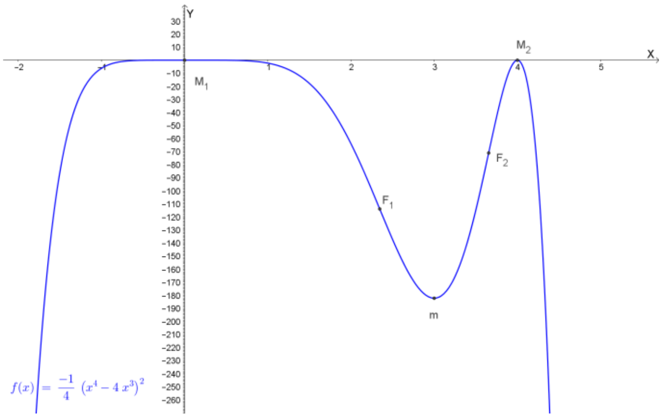
verso il basso se $x < \frac{21-\sqrt{21}}{7}$

verso l'alto se $\frac{21-\sqrt{21}}{7} < x < \frac{21+\sqrt{21}}{7}$

verso il basso se $x > \frac{21+\sqrt{21}}{7}$

Pertanto la funzione ha dei flessi per: $x = \frac{21-\sqrt{21}}{7}\ \ e\ \ x = \frac{21+\sqrt{21}}{7}$

Anche se non richiesto forniamo il grafico della funzione $y = P(x) \cdot Q(x) = -\frac{1}{4}(x^4 - 4x^3)^2$



Analizziamo ora la funzione $y = \frac{1}{P(x)}$.

Dominio di $y = \frac{1}{P(x)} = \frac{1}{x^4 - 4x^3} = \frac{1}{x^3(x-4)}$: $x \neq 0, x \neq 4$ (nel dominio la funzione è continua e derivabile).
Zeri: non ci sono zeri.
Segno: la funzione ha lo stesso segno (nel suo dominio) di $y = P(x)$, ossia:

$$y = \frac{1}{P(x)} > 0 \; se \;\; x < 0 \;\; vel \;\; x > 4$$

$$y = \frac{1}{P(x)} < 0 \;\; se \;\; 0 < x < 4$$

Dal grafico della funzione $y = P(x)$ e dalla sua equazione deduciamo i limiti di $y = \frac{1}{P(x)} = \frac{1}{x^3(x-4)}$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{P(x)} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0^+ \;\; , \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{P(x)} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty \;\; , \;\; \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{P(x)} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty \;\; ,$$

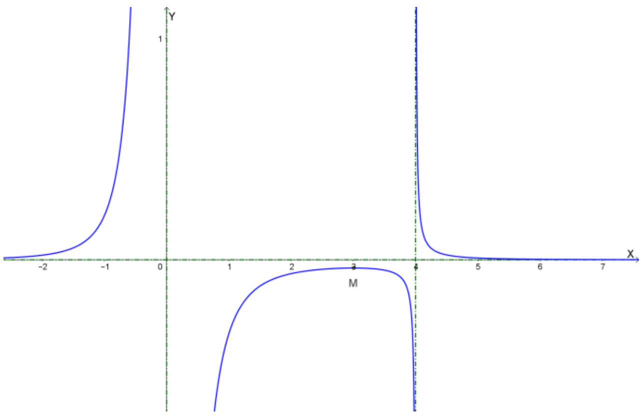
$$\lim_{x \to 4^-} \frac{1}{x^3(x-4)} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{1}{x^3(x-4)} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty \, , \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{P(x)} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0^+$$

Estremi:

Osservando il grafico di $y = P(x)$ notiamo che per x<0 esso è positivo e decrescente, quindi il grafico di $y = \frac{1}{P(x)}$ è positivo e crescente (fino a $+\infty$). Per $0 < x < 3$ il grafico di $y = P(x)$ è negativo e decrescente, quindi il grafico di $y = \frac{1}{P(x)}$ è negativo e crescente. Per $3 < x < 4$ il grafico di $y = P(x)$ è negativo e crescente, quindi il grafico di $y = \frac{1}{P(x)}$ è negativo e decrescente (fino a $-\infty$): $quindi\ x = 3$ è $punto\ di\ massimo\ relativo\ per\ \ y = \frac{1}{P(x)}$ $, con\ ordinata$: $\frac{1}{P(3)} = \frac{1}{-27}$. Per $x > 4$ il grafico di $y = P(x)$ è positivo e crescente (fino a $+\infty$), quindi il grafico di $y = \frac{1}{P(x)}$ è positivo e decrescente (fino 0).

Le informazioni fin qui raccolte sulla funzione $y = \frac{1}{P(x)} = \frac{1}{x^3(x-4)}$ ci permettono di indicare il suo grafico qualitativo (dal calcolo dei limiti deduciamo i seguenti asintoti: $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$):



Pertanto la funzione $y=\frac{1}{P(x)}$ ha solo un estremo relativo (massimo) per $x=3$ che vale $-\frac{1}{27}$.

Flessi:

$$y=\frac{1}{P(x)}=\frac{1}{x^4-4x^3};\ y'=-\frac{P'}{P^2}=-\frac{4x^3-12x^2}{(x^4-4x^3)^2}=-\frac{4x-12}{(x^3-4x^2)^2}\ ;\ y''=\frac{4(5x^2-30x+48)}{x^5(x-4)^3}\geq 0\ se$$

$$\frac{1}{x(x-4)}\geq 0:\ x<0\ \ vel\ \ x>4$$

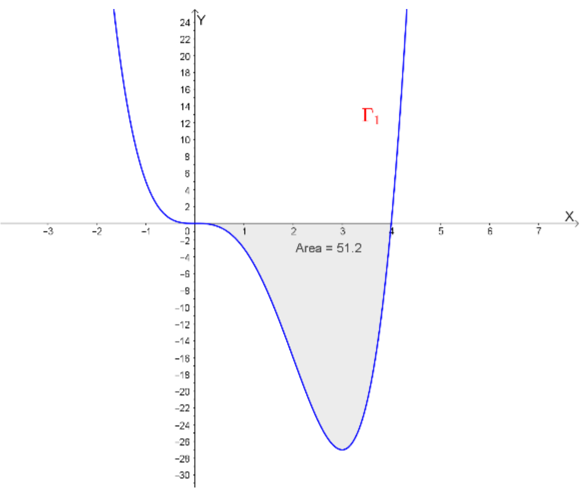
Quindi, il grafico volge la concavità:

verso l'alto se $x<0$
verso il basso se $0<x<4$
verso l'alto se $x>4$

Poiché la funzione non è definita in $x=0$ e $x=4$: NON CI SONO FLESSI.

c)

Calcolare l'area della regione $\mathcal{R}$ delimitata dal grafico della funzione $\mathcal{P}$ e dall'asse delle ascisse



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area=-\int_0^4 (x^4-4x^3)\ dx=-\left[\frac{x^5}{5}-x^4\right]_0^4=$$

$$=-\left(\frac{4^5}{5}-4^4\right)=\frac{256}{5}\cong 51.20\ u^2=Area$$

d)

Verificare che, per $x > 4$, la funzione $F(x) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-4}{x}\right)$ è una primitiva di $\frac{x^2}{P(x)}$.
Esprimere, in funzione di t, con $t \geq 5$, l'integrale $\int_5^t \frac{x^2}{P(x)}\,dx$ e calcolarne il limite per $t \to +\infty$ fornendo un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.

Verifichiamo che: $F'(x) = \frac{x^2}{P(x)} = \frac{x^2}{x^4-4x^3} = \frac{1}{x(x-4)}$

$$F'(x) = D\left[\frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-4}{x}\right)\right] = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x-4}\right)\left(\frac{x-(x-4)}{x^2}\right) = \frac{1}{x(x-4)}$$

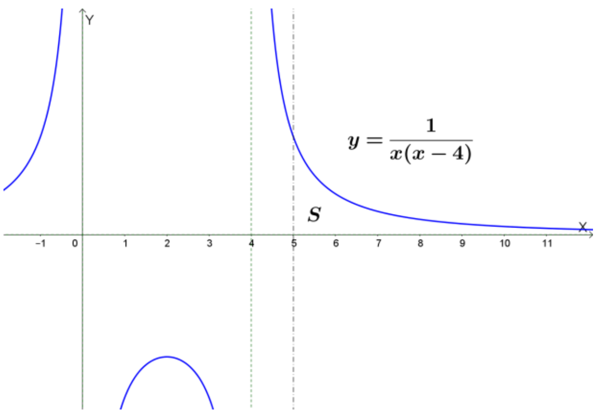
$$\frac{x^2}{P(x)} = \frac{x^2}{x^4-4x^3} = \frac{1}{x(x-4)} = F'(x)\ \ c.v.d.$$

$$\int_5^t \frac{x^2}{P(x)}\,dx = \left[\frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-4}{x}\right)\right]_5^t = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{t-4}{t}\right) - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{5} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{t-4}{t}\right) + \frac{1}{4}\ln 5 = \frac{1}{4}\ln\frac{5(t-4)}{t}, t \geq 5$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{4}\ln\left(\frac{t-4}{t}\right) + \frac{1}{4}\ln 5\right] = \frac{1}{4}\lim_{t\to+\infty}\left[\ln\left(1-\frac{4}{t}\right) + \ln 5\right] = \frac{1}{4}\ln 5 \cong 0.40$$

Il limite trovato rappresenta l'area della regione (aperta) S delimitata dal grafico della funzione di equazione $y = \frac{x^2}{P(x)} = \frac{1}{x(x-4)}$, *dalla retta* $x = 5$ *e dall'asse delle* x
(*tale regione è nel primo quadrante, perché per* $x \geq 5$ *la funzione è positiva*)

Indichiamo un grafico rappresentativo, anche se non richiesto, che può essere dedotto dal grafico della parabola di equazione $y = x(x-4)$, come funzione reciproca:



Con la collaborazione di Angela Santamaria