



Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

Indirizzi: LI22 – SCIENTIFICO QUADRIENNALE,
LI23 – SCIENTIFICO OPZIONE SCIENZE APPLICATE QUADRIENNALE

Disciplina: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Si consideri la funzione $f(x) = \frac{2x^2+ax+b}{cx-1}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- a. Determinare il valore dei parametri a, b, c in modo che il grafico della funzione f abbia la retta $x = \frac{1}{2}$ come asintoto verticale, l'asintoto obliquo passi per il punto $P\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ e la retta tangente nel punto di ascissa $x = -1$ passi dal punto $Q(2,3)$.

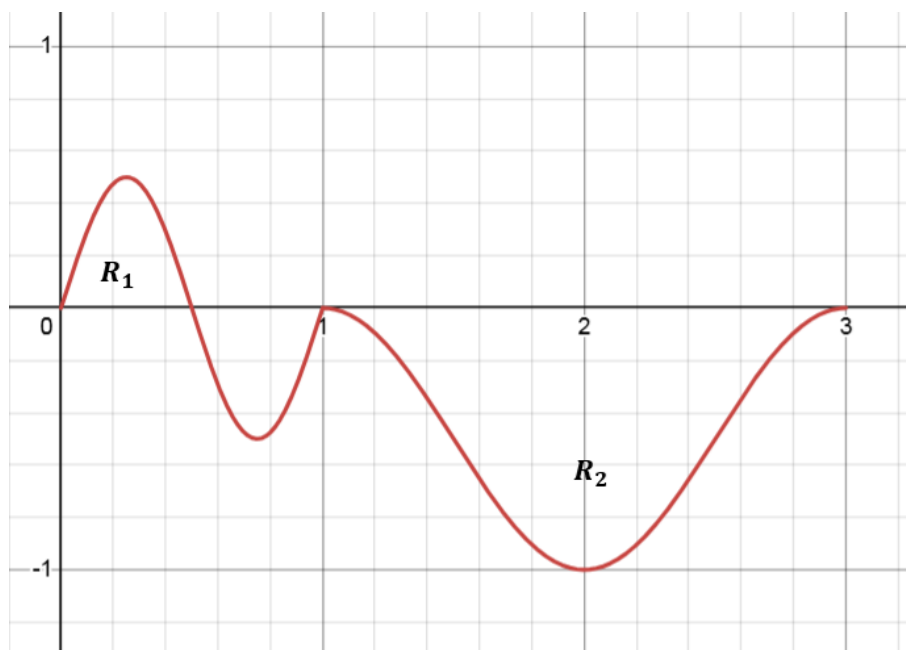
D'ora in avanti, si assuma che $a = 2, b = -1, c = 2$.

- b. Studiare la funzione corrispondente e disegnare il suo grafico γ .
- c. Considerati i rettangoli con i lati paralleli agli assi cartesiani e inscritti nella regione delimitata da γ e dall'asse delle ascisse, determinare quello di area massima.
- d. Calcolare l'area della regione R_k delimitata da γ , dal suo asintoto obliquo e dalle rette $x = k$ e $x = k^2$, con $k > 1$. Determinare il valore di k in corrispondenza del quale la suddetta area vale $\frac{1}{4} \ln \frac{17}{5}$.

PROBLEMA 2

Il grafico γ in figura, per opportuni valori dei parametri reali a, b, c, d , rappresenta, in un periodo T , la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a \sin(\pi b x) & 0 \leq x \leq 1 \\ c + d \cos(\pi x) & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$





Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

Indirizzi: LI22 – SCIENTIFICO QUADRIENNALE,
LI23 – SCIENTIFICO OPZIONE SCIENZE APPLICATE QUADRIENNALE

Disciplina: MATEMATICA

- a. Utilizzare le informazioni che si possono ricavare da γ per determinare i valori dei parametri e il periodo T . Calcolare $f(2025)$ e $f\left(\frac{121}{4}\right)$.

D'ora in avanti, si ponga $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = -\frac{1}{2}$, $d = -\frac{1}{2}$.

- b. Studiare la derivabilità in $\mathbb{R}$ della funzione f . Verificare che il teorema di Rolle è applicabile alla funzione nell'intervallo $[1; 3]$ e indicare l'ascissa del punto che ne verifica la tesi.
- c. Scrivere l'insieme immagine della funzione f e, al variare del parametro reale k , stabilire il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$, con $x \in [0; 3]$.
- d. Si consideri la funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $0 \leq x \leq 3$. Calcolare $F\left(\frac{1}{4}\right)$, $F(2)$ e utilizzare i risultati ottenuti per determinare le aree delle regioni R_1 ed R_2 .

QUESITI

1. Dato un trapezio circoscritto ad una circonferenza di centro O , dimostrare che il triangolo avente per vertici O e gli estremi di uno dei lati obliqui è un triangolo rettangolo.
2. Si estraggono in blocco 5 carte da un mazzo da 40, di cui 12 sono figure. Qual è la probabilità che escano esattamente 3 figure? Qual è la probabilità che escano almeno 3 figure?
3. Determinare le equazioni dei piani passanti per $A(3, -1, 4)$ e $B(2, -1, 3)$ e tangenti alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2 = 0$.
4. Fra tutti i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r , determinare quello di area massima.
5. Determinare per quali valori del parametro reale $k > 0$ il grafico della funzione $f(x) = e^x - kx^3$ risulta volgere la concavità verso l'alto $\forall x \in \mathbb{R}$.
6. Data la funzione $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax - 8 & \text{se } x < 1 \\ e^x + b & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$
si determinino i valori dei parametri reali a e b che rendono continua e derivabile $f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
7. Dimostrare che la funzione $f(x) = 2x^3 + e^x + \frac{\sin(x)+x}{2}$ ammette un solo zero.
8. Determinare l'area della regione finita di piano delimitata dalla funzione $f(x) = x \ln x$ e dalle rette $x = 1$ e $x = e$.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche o grafiche purché non siano dotate della capacità di elaborazione simbolica algebrica e non abbiano la disponibilità di connessione a Internet.

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla consegna della traccia.