

LICEO SCIENTIFICO – SUPPLETIVA 2026 – PROBLEMA 1

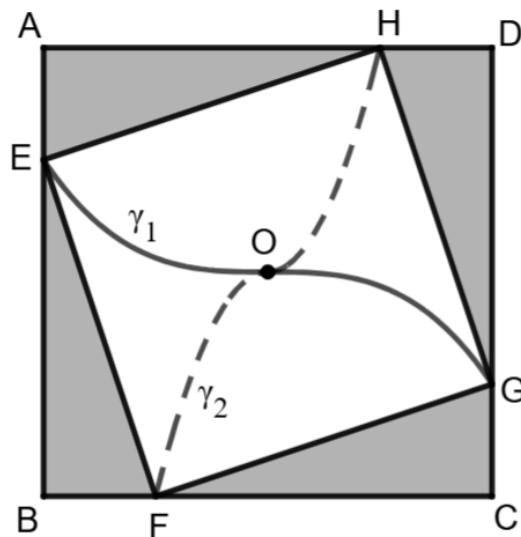
Soluzione proposta da Giuseppe Scoleri

www.matefilia.it

Testo del problema

Ai maestri artigiani di Deruta è stata commissionata la realizzazione di un tavolo in ceramica da esterni, di forma quadrata, di lato 1 metro. Sulla superficie del tavolo, si chiede di raffigurare un quadrato con ciascun vertice posto a distanza d dagli spigoli e due linee che lo dovranno attraversare per delimitare le parti da destinare alla decorazione (come in figura).

L'area della superficie ombreggiata equivale ai $\frac{3}{5}$ della rimanente.



a)

Determinare la distanza d tra B e F .

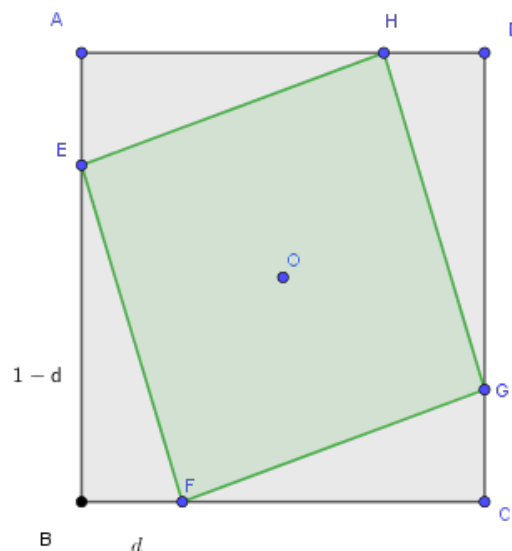
Si consideri un sistema di riferimento con origine nel punto O , centro del tavolo, e i semiassi positivi delle ascisse e delle ordinate passanti, rispettivamente, per il punto medio di CD e AD . La curva γ_1 , che unisce due vertici opposti E, G del quadrato interno, è descritta da una funzione polinomiale di 3° grado ed ha un flesso a tangente orizzontale nel punto O .

Fissato $d = \frac{1}{4}$, ricavare l'espressione analitica $f_1(x)$ di γ_1 , definita nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

D'ora in avanti, si ponga $f_1(x) = -2x^3$.

Soluzione del punto a

Calcolo della distanza d



Il quadrato $ABCD$ ha lato 1 m, quindi la sua area è:

$$A_1 = \text{area}(ABCD) = 1^2 = 1 \text{ m}^2$$

Il lato EF del quadrato interno è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti d e $1-d$, quindi:

$$\overline{EF}^2 = d^2 + (1-d)^2 = 2d^2 - 2d + 1, \quad 0 < d < 1$$

e l'area del quadrato $EFGH$ è:

$$A_2 = \text{area}(EFGH) = \overline{EF}^2 = 2d^2 - 2d + 1$$

L'area della superficie ombreggiata (i quattro triangoli agli angoli) è quindi:

$$A_1 - A_2 = 1 - (2d^2 - 2d + 1) = 2d - 2d^2 = 2d(1-d) > 0 \quad \text{per } 0 < d < 1$$

Per ipotesi tale area equivale ai $\frac{3}{5}$ dell'area di $EFGH$:

$$2d(1-d) = \frac{3}{5} (2d^2 - 2d + 1)$$

$$10d(1-d) = 3(2d^2 - 2d + 1)$$

$$10d - 10d^2 = 6d^2 - 6d + 3$$

$$16d^2 - 16d + 3 = 0$$

Risolvendo:

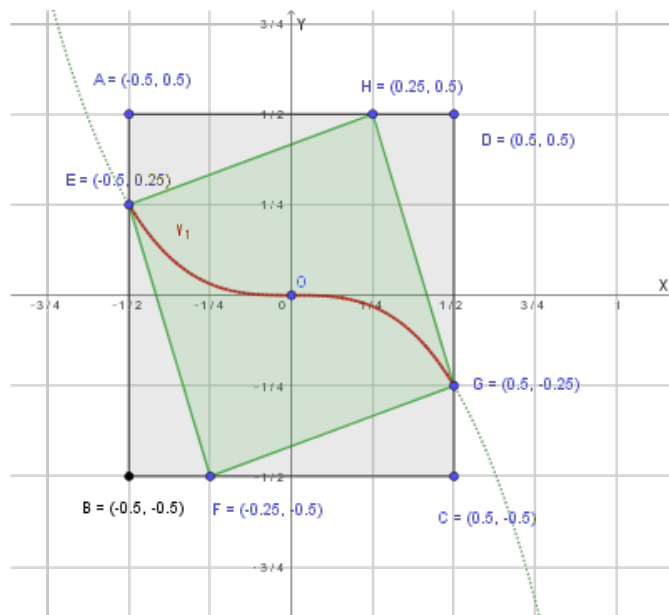
$$\frac{\Delta}{4} = 64 - 48 = 16 \quad \Rightarrow \quad d_{1,2} = \frac{8 \pm 4}{16} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{3}{4} \vee d = \frac{1}{4}$$

Poiché il quadrato interno $EFGH$ è disposto come in figura solo se $d < 1-d$, ossia $d < \frac{1}{2}$, si scarta la soluzione $d = \frac{3}{4}$ e si accetta:

$$\overline{BF} = d = \frac{1}{4}$$

Determinazione di $f_1(x)$

Fissiamo il sistema di riferimento richiesto, con origine O nel centro del tavolo e assi paralleli ai lati del quadrato.



Essendo il lato di $ABCD$ uguale a 1, i suoi vertici hanno coordinate:

$$A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad B\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Con $d = \frac{1}{4}$, i vertici del quadrato interno $EFGH$ risultano:

$$E\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \quad F\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right), \quad G\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right), \quad H\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

Poiché γ_1 ha un flesso a tangente orizzontale in $O(0,0)$, la retta tangente in tale punto (l'asse x) ha con la curva un contatto di ordine almeno 3: dunque $x = 0$ è una radice tripla del polinomio di terzo grado $f_1(x)$, che deve quindi essere del tipo

$$f_1(x) = ax^3$$

Imponendo il passaggio per $G\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$:

$$a\left(\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{a}{8} = -\frac{1}{4} \Rightarrow a = -2$$

Si verifica che la curva passa anche per $E\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$: $f_1\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4} \checkmark$

Conclusione:

$$\overline{BF} = d = \frac{1}{4} \text{ m} \quad | \quad f_1(x) = -2x^3, \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

b)

Il maestro artigiano afferma: «Il lato EF è tangente a γ_1 nel punto E ». Dimostrare che l'affermazione è falsa e determinare l'ampiezza dell'angolo che EF forma con la retta tangente.

Soluzione del punto b

Ricordiamo che $E = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ e che $f_1(x) = -2x^3$, da cui $f_1'(x) = -6x^2$.

Il coefficiente angolare della retta tangente a γ_1 in E è:

$$m_{tg} = f_1'\left(-\frac{1}{2}\right) = -6 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{3}{2}$$

Il coefficiente angolare della retta EF , con $E\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ e $F\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$, è:

$$m_{EF} = \frac{\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{1}{4}} = -3$$

Poiché $m_{EF} = -3 \neq -\frac{3}{2} = m_{tg}$, i due coefficienti angolari sono diversi, dunque:

EF non è tangente a γ_1 in E

Calcolo dell'angolo

Indichiamo con α l'angolo acuto formato tra EF e la retta tangente a γ_1 in E . Usando la formula per l'angolo tra due rette di coefficienti angolari m_1 e m_2 :

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{-\frac{3}{2} - (-3)}{1 + \left(-\frac{3}{2}\right)(-3)} \right| = \left| \frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{9}{2}} \right| = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{11}{2}} = \frac{3}{11}$$

Quindi:

$$\alpha = \arctan \left(\frac{3}{11} \right) \approx 15,26^\circ \approx 15^\circ 15'$$

Conclusione:

EF non è tangente a γ_1 in E ; l'angolo tra EF e la retta tangente è
 $\alpha = \arctan \frac{3}{11} \approx 15,26^\circ$

c)

La curva γ_2 , che unisce i vertici opposti F , H del quadrato, è costituita dagli archi di due parabole, tra loro simmetriche rispetto al vertice O comune ad entrambe. Definire a tratti la funzione f_2 , che descrive γ_2 nell'intervallo $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$.

Il maestro artigiano afferma: «Le curve γ_1 e γ_2 sono tangenti in O ». Dimostrare che l'affermazione è vera.

Si assuma

$$f_2(x) = \begin{cases} -8x^2, & -\frac{1}{4} \leq x \leq 0 \\ 8x^2, & 0 < x \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

Soluzione del punto c

Determinazione di $f_2(x)$

Ricordiamo che $H = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ e $F = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$.

Cerchiamo dapprima l'arco di parabola con vertice in O , passante per H , del tipo:

$$y = ax^2$$

Imponendo il passaggio per $H \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$:

$$\frac{1}{2} = a \cdot \frac{1}{16} \quad \Rightarrow \quad a = 8 \quad \Rightarrow \quad y = 8x^2, \quad 0 < x \leq \frac{1}{4}$$

Il secondo arco è simmetrico al primo rispetto al vertice comune O (simmetria centrale, cioè punto per punto $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$):

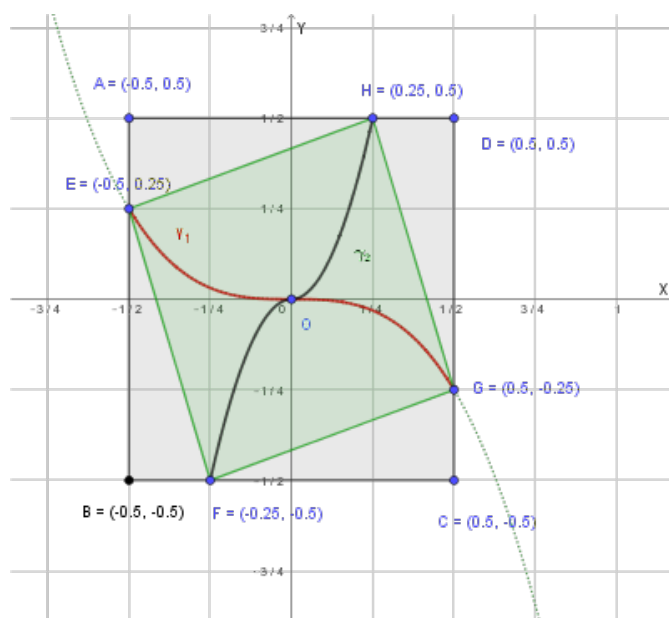
$$-y = 8(-x)^2 \Rightarrow y = -8x^2, \quad -\frac{1}{4} \leq x \leq 0$$

Si verifica che questo secondo arco passa correttamente per $F\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$:

$$-8\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = -8 \cdot \frac{1}{16} = -\frac{1}{2} \quad \checkmark$$

Pertanto:

$$f_2(x) = \begin{cases} -8x^2, & -\frac{1}{4} \leq x \leq 0 \\ 8x^2, & 0 < x \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$



Tangenza di γ_1 e γ_2 in O

Nel punto a) abbiamo visto che $f_1(x) = -2x^3$ ha un flesso a tangente orizzontale in O , quindi γ_1 è tangente all'asse x in O .

Per quanto riguarda f_2 , entrambi gli archi di parabola che la compongono hanno vertice in O : la parabola $y = 8x^2$ ha vertice (e quindi tangente orizzontale) in O , e lo stesso vale per $y = -8x^2$.

Essendo γ_1 e γ_2 entrambe tangenti alla stessa retta (l'asse x) nel punto comune O , esse sono tangenti tra loro in O .

Conclusione:

$$f_2(x) = \begin{cases} -8x^2, & -\frac{1}{4} \leq x \leq 0 \\ 8x^2, & 0 < x \leq \frac{1}{4} \end{cases} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \gamma_1 \text{ e } \gamma_2 \text{ sono entrambe tangenti all'asse } x \text{ in } O, \\ \text{quindi sono tangenti tra loro} \end{array} \right.$$

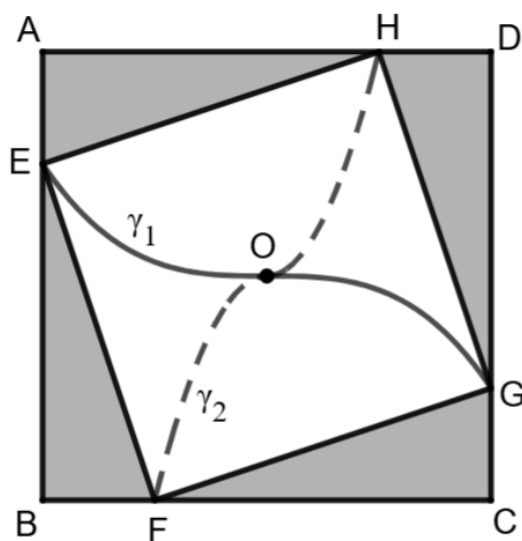
d)

Calcolare l'area di ciascuna delle quattro superfici che γ_1 e γ_2 determinano sul quadrato interno $EFGH$.

Soluzione del punto d

Area della regione delimitata da EH , γ_1 e γ_2

Calcoliamo dapprima l'area della regione delimitata dal lato EH e dagli archi di γ_1 e γ_2 compresi tra E e H (passando per O).



Ricordiamo che $E = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ e $H = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. Il coefficiente angolare della retta EH è:

$$m = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

La retta per $H \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ con $m = \frac{1}{3}$ è:

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{4}\right) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{12}$$

Verifichiamo che passa anche per E : $\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{12} = -\frac{1}{6} + \frac{5}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \checkmark$

L'area cercata si ottiene sommando l'integrale della differenza tra la retta EH e γ_1 (per $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$) con l'integrale della differenza tra la retta EH e γ_2 (per $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$):

$$A_1 = \int_{-1/2}^0 \left[\left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{12} \right) - (-2x^3) \right] dx + \int_0^{1/4} \left[\left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{12} \right) - 8x^2 \right] dx$$

Calcoliamo il primo integrale:

$$\int_{-1/2}^0 \left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{12} + 2x^3 \right) dx = \left[\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{12}x + \frac{1}{2}x^4 \right]_{-1/2}^0 = 0 - \left(\frac{1}{24} - \frac{5}{24} + \frac{1}{32} \right) = \frac{13}{96}$$

e il secondo:

$$\int_0^{1/4} \left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{12} - 8x^2 \right) dx = \left[\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{12}x - \frac{8}{3}x^3 \right]_0^{1/4} = \frac{1}{96} + \frac{5}{48} - \frac{1}{24} = \frac{7}{96}$$

Quindi:

$$A_1 = \frac{13}{96} + \frac{7}{96} = \frac{20}{96} = \frac{5}{24}$$

Le altre tre regioni

Osserviamo che le curve f_1 e f_2 sono entrambe funzioni dispari, quindi l'intera figura (vertici E, F, G, H e curve γ_1, γ_2) è simmetrica rispetto al centro O (simmetria centrale). Poiché H e F sono simmetrici rispetto a O , così come E e G , anche la regione delimitata da FG , γ_1 e γ_2 è l'immagine simmetrica rispetto a O di quella appena calcolata, quindi ha la stessa area:

$$A_{HE} = A_{FG} = \frac{5}{24}$$

Restano da determinare le altre due regioni (quella delimitata da EF , γ_1 , γ_2 e quella delimitata da GH , γ_1 , γ_2), anch'esse uguali tra loro per lo stesso motivo di simmetria centrale. Anziché calcolarle con due nuovi integrali, conviene sottrarre all'area del quadrato $EFGH$ le due aree già trovate.

Dal punto a) sappiamo che:

$$\text{area}(EFGH) = \overline{EF}^2 = d^2 + (1-d)^2 = \left(\frac{1}{4} \right)^2 + \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \frac{1}{16} + \frac{9}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

Le due aree rimanenti (uguali tra loro) valgono complessivamente:

$$\text{area}(EFGH) - 2A_{HE} = \frac{5}{8} - 2 \cdot \frac{5}{24} = \frac{5}{8} - \frac{5}{12} = \frac{15}{24} - \frac{10}{24} = \frac{5}{24}$$

quindi ciascuna delle due regioni rimanenti (quella tra EF e quella tra GH) ha area:

$$A_{EF} = A_{GH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{24} = \frac{5}{48}$$

$$\text{Verifica: } 2A_{HE} + 2A_{EF} = 2 \cdot \frac{5}{24} + 2 \cdot \frac{5}{48} = \frac{5}{12} + \frac{5}{24} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8} = \text{area}(EFGH) \quad \checkmark$$

Conclusione:

Regione presso EH e regione presso FG : area = $\frac{5}{24}$ ciascuna

Regione presso EF e regione presso GH : area = $\frac{5}{48}$ ciascuna